Didactique des mathématiques et de la statistique

Cours de Jean-Claude Régnier

4 Langage mathématique, registres sémiotiques et jeux de cadres

Nous revenons dans ce chapitre sur la question de l'expression et de la représentation de la connaissance mathématique en relation à celle de registres sémiotiques développée par Raymond Duval **[II.4-1]** et celle des jeux de cadre développée par Régine Douady **[II.4-2]**. Nous complétons ce que nous avons déjà abordé dans la chapitre 1C sur le langage mathématique dans la première partie.

4A. Fonctions de l'écriture symbolique

L'écriture symbolique s'utilise d'une part dans le passage signifiant-signifié et d'autre part dans le discours mathématique.

4A1. Fonction de l'écriture symbolique dans le passage signifiant - signifié

La fonction de l'écriture symbolique dans le passage signifiant – signifié présente deux formes de codage : les codages simples et les codages composés.

Les codages simples ont pour fonction la désignation dans les cas de notation d'un objet. Comme par exemple :

- *a*, *x*, *n* sont souvent utilisés pour désigner des nombres ;
- *P* et *A* pour désigner des points ;
- *(C)* notation d'un cercle.

Les codages composés correspondent à des combinaisons de signes suivant certaines règles. Ces combinaisons donnent lieu à des expressions symboliques que nous appelons codages composés et dont la structure traduit une ou des relation(s) du modèle mathématique : c'est le repérage de l'objet mathématique par rapport aux autres objets du modèle mathématique. Comme par exemple :

L'écriture [MM'] non seulement peut désigner un segment mais elle permet de le repérer dans l'ensemble des points du plan comme le segment d'extrémités M et M'.

L'écriture (a + b) x c désigne un nombre comme le résultat de certaines opérations mathématiques sur des nombres notés *a*, *b* et *c* ; les signes + et *x* expriment ces opérations, la structure de l'écriture rend compte de l'ordre dans lequel elles sont faites.

4A2. Fonction de l'écriture symbolique dans le discours mathématique

Le renvoi à un symbole ou à une expression symbolique dans le discours mathématique a lieu uniquement par répétition de ce symbole ou de cette expression symbolique. Un tel usage se produit en langage naturel pour les noms propres. Deux niveaux de répétition se distinguent :

- la simple répétition de l'expression symbolique qui désigne un objet ou une relation et qui a déjà été introduite dans le discours. A ce niveau, seule la fonction de renvoi s'exerce. Comme par exemple :

Tracez une droite Δ sur laquelle vous marquez un point A, puis deux arcs de cercle de centre A coupant Δ en I et J.

- la constitution d'une nouvelle combinaison de symboles déjà introduits dans le discours donnant lieu à la désignation d'un nouvel objet mathématique ou d'une nouvelle relation. A ce niveau, s'exercent à la fois le renvoi aux symboles déjà présents dans la partie du discours qui précède, et la désignation d'un nouvel objet donc le repérage de cet objet par rapport à d'autres supposés connus. Comme par exemple :

Marque un point A ; Trace le cercle (A ; 6 cm). Prends deux points B et C sur ce cercle. Compare avec un calque, ABC et ACB.

ABC et ACB sont des expressions symboliques composées de symboles A, B, C et ces expressions composées désignent de nouveaux objets : les secteurs angulaires.

L'écriture symbolique permet une formulation non ambiguë et plus concise. En ce sens, elle est efficace. Elle est une économie d'écriture. Elle devient un moyen commun de se comprendre. Enfin, elle favorise le travail cognitif dans la conceptualisation à partir du moment où elle est maîtrisée.

4B. Différences entre texte écrit et texte oral en classe

Le mode ostensif de désignation permet de rendre compte des différences entre texte écrit et texte oral en classe. Avant d'aborder ce mode, présentons les avertisseurs de désignation. Après la présentation de ce mode, nous examinons sa portée puis l'expression de l'opérateur de désignation.

4B1. Les avertisseurs de désignation

L'opération de désignation est fréquente dans les textes mathématiques écrits et oraux. L'explicitation de cette opération se fait par l'utilisation de termes du langage naturel qui avertissent de cette opération. Ces termes sont nommés avertisseurs de désignation. Comme par exemple :

Un polygone qui a quatre sommets, et dont les supports des côtés sont deux à deux parallèles, se nomme un parallélogramme.

« se nomme » avertit de la désignation de ces polygones particuliers par le terme parallélogramme. Les termes avertisseurs sont des noms comme notation, désignation, codage, définition et souvent des verbes comme appeler, dire, écrire, lire, noter, signifier, se nommer, désigner, qualifier, représenter. Une part d'implicite existe dans l'expression de l'opération de désignation. L'opération de désignation est exprimée par une phrase du langage mathématique ou plus rarement par une égalité dans le langage symbolique dans lesquelles sont présentes deux désignations de l'objet celle exprimée en termes (ou symboles) déjà connus et celle introduite. Comme par exemple :

Le parallélogramme obtenu quand les deux « bandes » ont même longueur est appelé un losange. Losange est la désignation introduite de l'objet désigné par la phrase.

4B2. Le mode ostensif de désignation

Ce mode ostensif consiste à montrer un exemple d'objet à désigner. Ce mode diffère entre texte écrit et texte oral en classe.

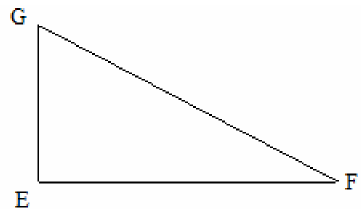
Le mode ostensif de désignation dans le texte écrit.

Dans le domaine arithmétique, les notions introduites sont relatives à des nombres. Les objets choisis comme exemples sont des nombres donnés par leur écriture habituelle, comme « *26,73* » qui désigne un nombre décimal dans une écriture qui combine des chiffres et une virgule.

Dans le domaine de la géométrie, c'est à l'aide de leur notation dans le langage symbolique que sont donnés les objets exemplaires mais leur représentation sur une figure est toujours jointe. C'est surtout de la figure qu'il faut extraire les caractéristiques de l'objet à désigner relatives à la désignation, qui ne sont pas explicitées. Prenons un exemple avec la notion de triangle rectangle qui peut être présentée dans un manuel scolaire par le paragraphe suivant :

Les triangles rectangles

Un triangle rectangle est un triangle tel que les supports de deux côtés sont perpendiculaires. Le triangle FEG rectangle en E. Le côté [FG] se nomme l'hypoténuse de ce triangle rectangle.



Grâce à la notation [FG] on peut remarquer que l'hypoténuse est le côté dont les extrémités sont différentes du sommet de l'angle droit (ici E). Mais, c'est essentiellement à partir de la figure *montrée* (représentation des objets géométriques) qu'on peut le faire. L'écriture a donc un rôle de renvoi à la figure.

Le mode ostensif de désignation dans le discours oral.

Nous examinons maintenant le mode ostensif de désignation dans le texte oral en classe correspondant essentiellement au discours mathématique de l'enseignant. Dans le discours oral, l'interrogation joue le rôle d'avertisseur annonçant une désignation. Mais il y a aussi l'utilisation des démonstratifs « ce » et « ça », notamment quand l'objet est représenté au tableau, qui leur font jouer un rôle de renvoi. Prenons un exemple plausible :

Enseignant *: Qu'est-ce que c'est ?*

Des élèves *: Un triangle*

Enseignant *: Quel triangle ?*

Des élèves *: FGE*

Enseignant *: Oui… Non, mais* **ce** *(renvoyant au dessin au tableau) triangle ? comment est-il ?*

Des élèves *: …rectangle*

Professeur *: C'est ça (ça renvoie encore au dessin du triangle au tableau et en même temps par un geste il peut pointer l'angle droit).*

Des élèves *: C'est ça un triangle rectangle ! …avec angle droit comme ça !*

4B3. La portée de la désignation dans le texte oral

La portée de la désignation dans un texte oral n'est qu'exceptionnellement indiquée. La limitation de la portée se fait donc par une suppression partielle des caractéristiques habituelles du texte mathématique écrit. Cette suppression se traduit par :

- une diminution de la distance du sujet humain qui introduit la désignation (nous), ou son apparition complète à l'oral (je) ;
- une prise en considération dans le discours de l'interlocuteur (vous, emploi de l'impératif) ;
- une suppression de l'a-temporalité du discours grâce à l'emploi du futur ;
- un ajout de modalités qui visent le sujet énonciateur éventuellement les interlocuteurs et non seulement le seul sujet mathématicien comme c'est le cas dans le texte mathématique écrit. En particulier le *si* introduisant une désignation relève d'une décision du sujet qui produit le discours en classe et n'annonce pas une implication de type mathématique.

Nous pouvons donner des exemples :

- *Si j'appelle FEG, un triangle rectangle, ça c'est FEG*
- *Vous allez appeler grand P, l'ensemble des quatre points là, sur l'hypoténuse FG*
- *Vous tracerez là sur ce triangle la hauteur issue de ce sommet là que je vous montre.*

4B4. L'expression de désignation

L'expression de l'opération de désignation connaît des implicites : le contexte, les éléments linguistiques, les usages en cours. Il existe toutefois des règles d'écriture d'un texte mathématique qui pourraient être ainsi schématisées :

- Dès qu'il introduit une désignation qu'il pense être inconnue du lecteur, l'auteur du texte l'explicite dans le discours à l'aide d'éléments du langage symbolique ou du langage mathématique qu'il suppose connus du lecteur.
- Cette explicitation est faite dans le discours au voisinage de la nouvelle désignation introduite.
- Ces deux désignations identiques peuvent dénoter deux objets différents : la portée de la première finit là où celle de la seconde commence. Ces règles sont minimales pour que la communication puisse s'établir entre auteur et lecteur. Cette condition est en particulier à prendre en compte par les auteurs de manuels scolaires.

L'expression de l'opération de désignation dans un discours oral s'identifie grâce :

- aux répétitions de membres de phrases (ce qu'on nomme des bribes) ;
- aux effets de chœur qui font suite à une phrase interrogative de l'enseignant à laquelle il répond d'ailleurs lui-même si un élève ne répond pas. Et même quand il y a réponse d'un élève, la plupart du temps l'enseignant la répète ;
- aux emplois fréquents de démonstratifs renvoyant à des écritures ou des diagrammes ou des figures tracés au tableau ou dans les cahiers des élèves.

4C. Registres sémiotiques et jeux de cadres théoriques.

Des travaux réalisés en didactique des mathématiques sur l'analyse de tâches auxquelles les élèves sont confrontés, sont trouvés éclairés par deux notions : d'une part celle de registre d'expression ou de représentation, d'autre part celle de jeux de cadres théoriques.

Un registre désigne les différents systèmes sémiotiques utilisables pour présenter une information ou objectiver une représentation mentale. Il est constitué de signes et réalise un moyen d'expression ou de représentation d'un objet, d'une idée ou d'un concept. Changer de registre sémiotique implique une réorganisation de la présentation d une connaissance.

Un cadre théorique de référence est formé par des objets mathématiques, par des relations entre ces objets, par leurs différentes formulations mais aussi par les images mentales qui sont associées à ces objets. Changer de cadre c'est alors produire différentes formulations pour un problème qui ne sont pas nécessairement sémantiquement congruente et reconnaître dans une formulation, l'emploi d'outils ou de techniques non utilisables dans une autre formulation.

Plaçons dans la cadre théorique de la géométrie, nous pouvons disposer :

- du registre figuratif, rattaché à la perception visuelle ou tactile, munie de ses propres lois d organisation ;
- du registre du langage naturel permettant de décrire et d'expliciter la statut des énoncés ;
- du registre du langage symbolique permettant d'écrire et de recourir à des formules.

Si nous prenons comme exemple le concept de fonction, nous pouvons identifier le recours à trois registres de représentation :

- un registre "tableaux"
- un registre "graphiques"
- un registre "algébrique".

Par ailleurs entre deux présentations d'une information, on peut repérer deux relations indépendantes :

- la relation **d'équivalence référentielle**

Entre deux expressions, entre deux présentations d'information, on peut établir une relation désignée par *équivalence référentielle* qui est déterminée par le fait qu'elles veulent dire la même chose, qu'elles sont vraies ou fausses simultanément.

- la relation de **congruence sémantique**

Entre deux expressions, entre deux présentations d'information, on peut établir une relation désignée par *congruence sémantique* articulée autour de la notion de sens associatif interne à un domaine, à un registre, à une théorie ou à un contexte.

La **substitivité** est une propriété inhérente à tout registre et est essentielle dans tout changement de registre. Notons alors que cette propriété est essentielle dans la démarche mathématique basée en partie sur l'invariance référentielle.

Raymond Duval considère d'ailleurs qu'un des obstacles rencontrés par nombre d'élèves dans leur apprentissage des mathématiques tient au fait que le fonctionnement spontané de la pensée s'ordonne préférentiellement selon la congruence sémantique alors le raisonnement mathématique requiert un ordonnancement basé sur l'équivalence référentielle. Ceci met à jour une nouvelle approche de la question du langage mathématique. Pour R. Duval, nous ne pouvons simplement et globalement opposer le langage naturel aux langages logico-mathématiques ainsi qu'aux représentations figurales ou graphiques. Il y a tout lieu de considérer que la véritable barrière qui arrête en chemin nombre d'élèves se situe dans jeu de la congruence, non-congruence sémantique. Le niveau de non-congruence sémantique entre couples d'énoncés dans le jeu de la substitution d'une expression ou d'une représentation à une autre détermine le niveau de résistance de la barrière à la conceptualisation en mathématiques. Des travaux de Colette Laborde [II.4-3] ont bien mis en évidence l'importance de l'interaction entre deux registres de langage. Les passages entre registres induisent des confrontations entre des représentations de nature différente d'un même objet mathématique. Ceux-ci semblent probablement être des passages obligés pour accéder au sens de toute présentation mathématique.

R. Duval affirme clairement l'importance dans une analyse a priori de chercher à prévoir l'efficacité des représentations qui seront en jeu dans une situation d'enseignement-apprentissage. Il considère essentielle la prise en compte de la fonction que remplira la représentation produite dans une démarche de connaissance déterminée en même temps que la situation de la représentation. Pour revenir à la notion de *registre de représentation*, R. Duval définit ainsi « tout système sémiotique permettant de remplir les trois fonctions cognitives fondamentales suivantes : communication (ou transmission), traitement, objectivation. ». Un registre se détermine alors par rapport à un système sémiotique permettant de remplir ces trois fonctions. R. Duval met en garde contre l'attrait de ne prendre en considération que la « dualité représentationnelle » langage/image. En faisant référence à l'histoire du développement des connaissances mathématiques, nous pouvons identifier l'existence de différents registres de représentation : Exemples concernant le langage écrit :

- chez les mathématiciens grecs, constitution d'un registre d'écriture algébrique,
- au XIX^{ème} siècle, création de langages formels.

Exemples concernant l'image :

- construction de figures planes puis construction de représentation de l'espace (Rudolph Bkouche [II.4-4]),
- construction de graphiques qui permettent de mettre en relation des figures géométriques (sections coniques) et des équations.

On a ainsi assisté à une double extension des registres de représentation :

- un développement des registres de langage,
- un développement des registres d'images.

R. Duval attribue clairement la création de ces différents registres de représentation aux « nouvelles possibilités de fonctionnement représentationnel, c'est-à-dire aux possibilités différentes d'appréhension et de traitement qui s'avéraient nécessaires pour le progrès des connaissances mathématiques et scientifiques ». Selon lui, cela signifie que « chaque registre de représentation donne la possibilité de traitements ou d'opérations qui lui sont propres et qui ne peuvent pas être effectués dans un autre registre ». Il y a donc lieu de souligner à la fois l'importance de la différenciation des registres et celle de travailler les problèmes didactiques que pose l'articulation des registres. Dès que l'on parle de représentation, il convient de ne pas réduire la diversité des registres à la seule opposition langage/image ni privilégier exclusivement l'un des deux pôles selon les situations. L'importance des différences entre registres discursifs et synoptiques et les passages d'un registre à l'autre est à prendre en considération de manière prioritaire, tout comme la distinction entre le contenu d'une représentation et l'objet représenté.

Quant à la notion de "cadre mathématique", elle renvoie à celle de cadre théorique, c'est-à-dire ce qui est constitué "par les objets d'une branche mathématique, par les relations entre ces objets, par leurs formulations diverses et les images mentales qui leur sont associées. Ainsi parle-t-on de cadre géométrique ou de cadre algébrique. Les changements de cadres conduisent à des changements de formulation d'un problème voire même à des changements de problème. Selon Régine Douady, ils sont un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement équivalentes permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.

Il convient de distinguer *registre* et *cadre* puisque ce dernier se détermine par rapport à des objets théoriques, en l'occurrence des objets mathématiques alors que le registre se détermine par rapport aux fonctions posées plus haut : *communication, traitement et objectivation*. Il existe par exemple un cadre géométrique qui peut mobiliser plusieurs registres, mais il n'existe pas de registre géométrique. Par contre, il existe un registre de figures géométriques.

4D. Apport pour l'enseignant

Le langage a une double fonction : la communication sociale et la représentation du réel en entendant que celle-ci comprend des éléments pertinents de la situation, l'action elle-même et des relations entre action et situation. L'activité langagière exprime l'implication du sujet dans la tâche ou dans le jugement, son estimation de la plausibilité d'une hypothèse ou d'une conclusion. D'où la nécessité de tenir compte de la base de connaissances de l'utilisateur en plus d'une structuration propre au langage utilisé rapidement technique dans l'apprentissage des sciences. Dans une classe, dans une situation d'enseignement de mathématiques, des éléments de la réalité objective apparaissent tel que le sujet parlant, le modèle langagier et les textes écrits comme oraux que le sujet doit traiter. La réalité objective comprend les objets définissant le contenu du discours (signifiés) et les paramètres de référence que sont les interlocuteurs (enseignant et apprenant(s)) et la situation spatio-temporelle (la classe). Le sujet parlant (enseignant et/ou apprenant(s)) possède des structures cognitives et affectives lui permettant de construire progressivement sa connaissance du monde qu'il injectera dans le langage. Le modèle langagier en vigueur dans le **milieu** pour l'enseignement des mathématiques est le langage mathématique normé considéré comme universel. Les textes écrits comme les textes oraux doivent être traités par le sujet pour produire, comprendre, mémoriser. Le recours au langage dans l'apprentissage ne prend tout son sens que dans et pour la communication sociale. Ce moment social est un des premiers moments de l'apprentissage. Cet aspect de confrontation ou de collaboration est sous estimé dans la pratique didactique courante. Dans le fonctionnement classique de l'enseignement-apprentissage des mathématiques, l'administration de la preuve est presque entièrement du côté de l'enseignant.

Quelles situations didactiques sont à mettre en place pour que les élèves abordent cette notion de preuve, de communication sociale notamment en ce qui relèvent de l'élaboration et l'appropriation des langages scientifiques ?

Ce qui est abstrait aujourd'hui pour un élève sera concret pour lui après-demain, lorsqu'il aura parfaitement délimité et analysé l'objet nouveau ainsi construit. Désigner cet objet par un mot nouveau, une expression nouvelle ou un symbolisme nouveau est une aide à la conceptualisation et non pas une gêne. Ce qui gêne les élèves, par contre, c'est de leur présenter les symboles mathématiques comme des objets ou de laisser penser aux élèves qu'il pourrait en être ainsi, faute d'établir avec eux la signification des concepts enseignés en les référant aux situations qu'ils permettent de penser et de traiter. La signification des concepts mathématiques ne vient pas principalement des symboles qui les représentent, mais des situations et des activités qu'ils contribuent à conceptualiser. Certaines de ces situations sont proprement mathématiques, mais ce n'est pas le cas de toutes. Il serait préjudiciable de méconnaître cette double fonction des mathématiques.

Un même écrit mathématique renvoie à des niveaux de réalité distincts : des phénomènes, des concepts et des objets mathématiques de différents niveaux. Les mathématiques schématisent des concepts. En retour, les objets mathématiques modélisent les phénomènes empiriques. Les symboles semblent dénoter ces derniers : les élèves abordent les mathématiques par les symboles. Le rapport des objets mathématiques aux concepts est un rapport d'interprétation. Les objets mathématiques sont des structures de sens qui se découvrent progressivement aux élèves, comme l'égalité qui ne prend tout son sens mathématique qu'au lycée lorsque les élèves étudient les propriétés de cette relation. Dés lors, la compréhension des énoncés de problèmes est essentielle pour résoudre ces problèmes. Ce travail de compréhension est à mettre en relation avec le langage mathématique.

Il importe aussi de considérer les bénéfices que l'enseignant peut tirer d'une attention portée aux places et rôles des notions de jeu de cadres et de registres de représentation. Nous pensons qu'une possibilité importante de confrontation réside dans ces "jeux de cadres" et ces "passages entre registres d'expression".Tout nous porte à croire que "jeux de cadres" et "passages entre registres" offrent les conditions propices aux confrontations requises dans la résolution de problèmes mais aussi dans l'approche visant à la réalisation d'un tâtonnement expérimental en mathématique, au sens large.

Pour aller plus loin…

[II.4-1] **Duval, R.**, (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Berne : Peter Lang

[II.4-2] **Douady** R., (1984) *Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*, Paris Thèse : Université de Paris VII

[II.4-3] **Laborde, C.**, (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse de Doctorat d'Etat (Université Grenoble)

[II.4-4] **Bkouche R.**, (1988) *Quelques grandes problématiques de l'histoire de la géométrie*, Lille : IREM de Lille.

[II.4-5] **Damm R**. (1992). *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*. Strasbourg : Thèse U.L.P

[II.4-6] **Petit S., Camenisch, A.**. (2007). La formation savante de mots en mathématiques *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* (470). Paris : A.P.M.E.P. (pp. 311-332)