Didactique des mathématiques et de la statistique

Cours de Jean-Claude Régnier

Approche didactique des mathématiques

Partie 7

La didactique des mathématiques vue comme une science des conditions spécifiques de l'acquisition provoquée des connaissances mathématiques se précise par ses objets, ses méthodes et ses buts. Une des conditions réside dans les caractéristiques des situations d'enseignement et d'apprentissage. Par ailleurs en considérant que l'utilisation d'outils langagiers est consubstantielle à l'activité scientifique, la didactique des mathématiques cherche, entre autre, à prendre en compte l'importance des intermédiaires langagiers dans la construction des connaissances. L'activité de résolution de problèmes de mathématiques est au cœur du processus d'apprentissage. Cette activité nécessite que l'enseignant, constructeur de problèmes, en assure la dévolution aux élèves par l'intermédiaire des énoncés qu'ils doivent comprendre. Plus généralement le texte mathématique nécessite des apprentissages spécifiques. L'identification des difficultés et des obstacles à partir de celle des erreurs commises par les apprenants tient une place importante dans la recherche des conditions de l'efficience de l'acquisition provoquée. L'évaluation est elle-même un processus fondamental au sein du des situations didactiques et donc un objet de la didactique des mathématiques.

Objectifs	Contenu
Faire comprendre ce qu'est la didactique des mathématiques par ses objets, ses méthodes, ses emprunts et ses finalités.	1. Enseigner, faire apprendre et apprendre les mathématiques. 2. Théorie des situations didactiques.

<u>Mots clé</u> : obstacles, erreur, transposition, contrat, schème, situation, praxéologie, langage, résolution de problème.

1 Enseigner, faire apprendre et apprendre les mathématiques

1A L'activité mathématique

Avant d'analyser comment on apprend des mathématiques, il est utile de s'intéresser à l'activité mathématique. L'idée la plus naturelle est alors de se tourner vers les mathématiciens professionnels et d'examiner, si tant est possible, leur activité quotidienne.

Alain Bouvier **[II.1-1]** décrit ainsi l'activité mathématique : « face à un problème, en général, le sujet se livre à des calculs, des tâtonnements, des expériences ; puis à partir des données accumulées, il émet une ou plusieurs conjectures qui lui semblent raisonnables. Arrivé là, il tente d'apporter la preuve de la véracité de cette conjecture. S'il n'y arrive pas, il essaie de remettre en cause la conjecture émise ; il se livre à de nouveaux calculs ; il multiplie les exemples ; il affine sa connaissance du problème pour émettre une conjecture plus précise et, espère-t-il, plus facile à prouver. »

D'autre part, William P. Thurston **[II.1-2]** précise quelques aspects de la recherche d'un mathématicien professionnel :

- la réponse et les outils sont inconnus a priori ;
- le temps est nécessaire pour approfondir la question (changement de point de vue, lectures de travaux antérieurs, reformulation de la question) ;
- les connaissances du chercheur sont en perpétuelle évolution (construction ou reconstruction par un mouvement de va et vient de l'outil à l'objet) ;
- les échanges avec les pairs sont indispensables (séminaires, congrès, …) ;
- la validation de la recherche est prise en charge par la communauté scientifique ;
- la recherche est source de plaisir et de jubilation.

Nous voyons donc que la notion de problème est centrale en mathématiques, et cela amène certains à dire que « faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes ». Mais l'activité mathématique ne se réduit pas à la seule recherche de problème. A certaines époques, la communauté mathématique a senti le besoin, non pas de résoudre des problèmes, mais de réécrire les mathématiques. Le premier exemple est nous est donné par les éléments d'Euclide. Ce dernier, à l'aide de quelques postulats de départ, a construit et écrit les mathématiques connues à son époque. Cette écriture du texte du savoir mathématique est aussi une activité essentielle, nous la retrouvons à diverses époques. Dans la première moitié du vingtième siècle, un groupe de mathématiciens français sous le nom de Bourbaki **[II.1-3]**, a écrit un immense traité des mathématiques en quarante volumes selon une pensée très formaliste.

Les deux activités (résolution de problèmes et restructuration des connaissances mathématiques) vont de pair et se complètent. Il est clair qu'il est nécessaire, pour la communauté mathématique, de structurer les nouvelles connaissances développées par la recherche de problèmes et que cette dernière profite de cette restructuration pour développer de nouvelles approches de problèmes mathématiques.

1B L'enseignement des mathématiques

Depuis une dizaine ou un vingtaine d'années, la résolution de problèmes tient une place centrale dans l'apprentissage des mathématiques en France. Voici ce que dit le programme **[II.1-4]** de l'école primaire : « *La résolution de problèmes est au centre des activités mathématiques et permet de donner leur signification à toutes les connaissances qui y sont travaillées : nombres entiers et décimaux, calcul avec ces nombres, approche des fractions, objets du plan et de l'espace et certaines de leurs propriétés, mesure de quelques grandeurs.* »

De même dans le nouveau programme **[II.1-5]** de mathématiques de la classe de sixième, le titre d'un paragraphe s'intitule : « *Une place centrale pour la résolution de problèmes* ». On peut y lire : « *Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur l'établissement de connaissances nouvelles, elle est également un moyen privilégié d'en élargir le sens et d'en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, jouent un rôle important. Leur traitement nécessite initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles*. »

Le Conseil National des Programmes précise la notion d'activité mathématique dans le livre **[II.1-6]** « Qu'apprend-on au collège ? » : *« Ainsi, ils (les élèves) prennent conscience de ce qu'est une véritable activité mathématique :*

- *identifier, formuler un problème;*
- *expérimenter sur des exemples, prévoir un résultat possible ;*
- *élaborer une démonstration ;*
- *contrôler les résultats et leur pertinence en fonction du problème étudié ;*
- *communiquer une recherche, mettre en forme et rédiger une solution. »*

Nous pouvons retrouver ces mêmes injonctions dans les programmes des classes de lycée. Il faut bien avoir à l'esprit que ceci n'a pas toujours été présent dans les programmes de mathématiques. Ainsi dans des instructions officielles on pouvait lire que les problèmes devaient porter très souvent sur l'application de la leçon précédente, offrant à l'enseignant un moyen de s'assurer que celle-ci a été bien comprise et qu'elle n'avait pas été oubliée. La résolution de ces problèmes ne nécessitait pas initiative et n'était pour l'élève qu'un moyen de réinvestir les connaissances.

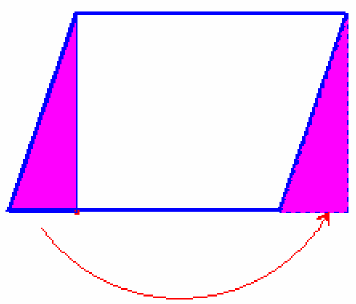
1C Qu'est-ce qu'un problème ?

Pour répondre à cette question, nous allons faire un détour par la psychologie cognitive. J.F Richard **[II.1-7]** met en relation les mots tâches, situation d'exécution et problème. Il distingue trois types de tâches :

- les tâches de résolution de problèmes ;
- les tâches d'exécution non automatisées ;
- les tâches d'exécution automatisées.

Il précise qu'une tâche devient une tâche de résolution de problème si le sujet ne dispose pas de connaissances suffisantes et disponibles presque immédiatement pour élaborer une procédure de résolution. En revanche, si ces connaissances sont présentes chez le sujet, celui-ci est devant une tâche d'exécution.

Ainsi, pour un sujet qui connaît la formule de l'aire d'un parallélogramme, calculer l'aire d'un parallélogramme est une tâche d'exécution, alors que cette même tâche est problématique pour celui qui ne connaît que les formules d'aires de triangle et rectangle. En effet, il devra découper le parallélogramme, déplacer un triangle, recomposer un rectangle :



Ainsi une tâche n'est pas problématique en soi, elle dépend du sujet qui doit la réaliser et donc de ses connaissances.

1D La résolution de problème.

Certains auteurs, comme Georges Polya G, ont étudié l'apprentissage de la résolution de problèmes. Ce dernier, dans son ouvrage **[II.1-8]** « *Comment poser et résoudre un problème.*» propose les étapes suivantes :

- comprendre le problème (déterminer l'inconnue, repérer les données, …),
- concevoir un plan (trouver le rapport entre les données et l'inconnue,…),
- mettre le plan à exécution,
- examiner la solution obtenue.

On retrouve cette modélisation de la résolution de problèmes dans les programmes des dernières années, notamment ceux de l'école primaire. En effet, on peut y lire **[II.1-9]**: « *reconnaître, trier, organiser et traiter les données utiles à la résolution d'un problème ; formuler et communiquer sa démarche et ses résultats, …, élaborer un questionnement à partir d'un ensemble de données.* ». Plus tard, Alan Schoenfeld **[II.1-10]** a montré que le découpage de Polya était trop général pour être efficace. Il pouvait y avoir de nombreux aller-retour entre les phases du découpage et que d'autres paramètres, comme les convictions du sujet, pouvaient entrer en ligne de compte.

Dans les années 90 Jean Julo a étudié les représentations liées à la résolution de problème **[II.1-11].** Il a montré que la réussite d'un problème dépendait fortement de « l'habillage d'un problème » et non de la structure mathématique sous-jacente. Par exemple, il considère le problème suivant :

« *On dispose d'une jarre de vin et d'une jarre d'eau. On prend un verre de vin dans une jarre de vin et le verse dans la jarre d'eau. Puis on prend un verre du mélange obtenu et on le verse dans la jarre de vin (le verre est le même pour les deux opérations).*

Parmi ces trois affirmations laquelle vous paraît juste :

il y a plus de vin dans la jarre d'eau que d'eau dans la jarre de vin *il y a plus d'eau dans la jarre de vin que de vin dans la jarre d'eau*

il y autant de vin dans la jarre d'eau que d'eau dans la jarre de vin. »

Si on remplace les jarres contenant vin et eau par des boîtes contenant des billes vertes et rouges, le problème, au sens mathématique, est exactement identique. Jean Julo a remarqué que la réussite est nettement plus élevée avec la version « boites avec billes ». Il explique que dans la première version l'idée de concentration, de miscibilité des liquides, idée qui perturbe la résolution, est nettement plus présente. Avec la deuxième version, il est plus aisé de formuler l'argument suivant : les billes rouges prélevées de la première boîte ont été remplacées par des billes vertes en même nombre puisque les boîtes contiennent le même nombre de billes au départ et à l'arrivée. Les orientations prises depuis l'année 2007 dans le domaine de la résolution de problèmes mathématiques méritent d'être analysées. Dans sa thèse récemment soutenue (mai 2008) Maryvonne Priolet **[II.1-11]** aborde la question de l' enseignement et de l'apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques à partir du cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire française dans des approches didactique et ergonomique. Elle apporte des élèments pour étayer le propos.

Pour aller plus loin…

[II.1-1] Bouvier A., (1981), *La mystification mathématique*, Paris : Hermann

[II.1-2] Thurston W. P., (1995), Preuve et progrès en mathématiques, *Repères* n°21.

[II.1-3] Le groupe Bourbaki a été fondé en 1935 par d'anciens élèves de l'École normale supérieure dont Henri Cartan, André Weil et Jean Dieudonné.

[II.1-4] Programme du cycles des approfondissements, BO HS n°1, Fev 2002

[II.1-5] Programme de mathématiques de la classe de sixième, BO du 6 Juillet 2004

[II.1-6] *Qu'apprend-on au collège ?,* Conseil national des programmes, CNDP, janvier 2002

[II.1-7] Richard, JF, (1995) *Les activités mentales*, Paris : Armand Colin

[II.1-8] Polya, G., (1965), *Comment poser et résoudre un problème.* Paris : Jacques Gabay

[II.1-9] Programme de mathématiques du cycle 3

[II.1-10] Schoenfeld, A., (1985) *Mathematical problem solving*, NY: ed Academic press

[II.1-11] Julo, J., (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Rennes : Presses universitaires de Rennes

[II.1-12] Priolet, M., (2008), *Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques : Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire française. Approches didactique et ergonomique*. Thèse de Doctorat en Sciences de l'éducation. ED 485 EPIC Université de Lyon (6 mai 2008) Directeur : Professeur Jean-Claude Régnier

accessible en ligne : http://demeter.univ-lyon2.fr/sdx/theses/lyon2/2008/priolet_m

2 Théorie des situations didactiques

Dans les années 60, Guy Brousseau a commencé à étudier les conditions d'apprentissage des mathématiques à l'école primaire et a, par la suite, construit cette théorie qui a pour but de modéliser cet apprentissage des mathématiques.

2A Un exemple introductif : qui dira 20 ?

Prenons un exemple, souvent choisi par Guy Brousseau lui-même, pour introduire cette théorie. On propose à des élèves le jeu suivant intitulé couramment « la course à 20 ». Le jeu comporte deux partis adverses qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit pour chacun des adversaires d'être le premier à réussir à dire « 20 ». Celui qui commence le jeu, a le droit de dire un entier naturel non nul inférieur ou égal à 2, c'est à dire, 1 ou 2. Puis l'adversaire à son tour intervient en ajoutant un entier inférieur ou égal à 2. Et ainsi de suite tour à tour. Ainsi par exemple, le premier dit 1 ; l'autre ajoute 2 ce qui donne 3 ; à son tour, il ajoute 1 ce qui donne 4 ; l'autre ajoute alors 2 ce qui donne 6 et ainsi de suite.

Voici les principales phases du jeu.

<u>Phase 1</u> : Explication de la procédure

L'enseignant explique aux élèves les règles du jeu et les explicite en jouant contre un enfant au tableau puis cède sa place à un autre enfant.

<u>Phase 2</u> : Jeu à 1 contre 1 (environ 10 minutes)

Les enfants jouent deux par deux un petit nombre de parties. Au cours de cette phase, les enfants peuvent se rendre compte qu'il n'est pas judicieux de répondre au hasard et certains découvrent qu'une stratégie gagnante au cours du jeu est d'arriver à dire « 17 ».

<u>Phase 3</u> : Jeu à une équipe contre une équipe (environ 20 minutes)

Les élèves se répartissent en deux équipes. Pour chaque partie du jeu, l'enseignant désigne un élève de chaque équipe et le jeu se déroulera entre ces deux élèves. Au cours de cette phase, les élèves se rendent compte de la nécessité d'échanger entre eux de la stratégie à adopter et très rapidement la stratégie gagnante « dire 17 » apparaît.

<u>Phase 4</u> : Jeu de la découverte (20 minutes)

Lors de cette phase, les élèves sont invités à énoncer des propositions concernant leur stratégie. Celles-ci sont inscrites au tableau et sont vérifiées par l'équipe qui ne les a pas formulées. A ce moment là, elles sont acceptées ou rejetées. Pour chaque proposition énoncée, l'élève devra prouver à un élève de l'équipe adverse qu'elle est vraie ou qu'elle est fausse, soit en jouant, soit en donnant une preuve intellectuelle. Un système de gain de points lors de cette phase peut la rendre plus intéressante. (1 point pour une proposition énoncée et acceptée par la classe et 3 points pour l'équipe qui invalide une proposition)

Guy Brousseau a remarqué qu'au bout de quelques parties, les élèves découvrent qu'il suffit de dire 17, puis 14, puis 11, puis 8. Au bout d'une heure, les élèves ont constaté que pour gagner il fallait dire 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 et 17.

Citons Guy Brousseau **[II.2-1]** pour énoncer ici quelques remarques :

« - *les stratégies et découvertes sont utilisées implicitement avant d'être formulées, pour répondre aux nécessités d'une action en cours ;*

- la formulation intervient après la conviction et avant la preuve, pour répondre aux nécessités d'une action requérant sa communication. Plusieurs formulations précèdent la preuve et s'appuient à la fois sur l'efficacité et sur la rationalité ;

- les théorèmes établis ne servent pas tout d'abord à étayer les uns les autres, leur articulation n'est découverte qu'à la fin. Le même théorème est redécouvert plusieurs fois, même par un même enfant ;

- ce sont les enfants qui perdent une partie qui veulent le plus expliquer leur échec, ou les conditions de la réussite ;

- la démonstration atteint sa valeur mathématique lorsqu'elle a été éprouvée comme moyen de convaincre et comme obligation d'être convaincu. Ce qui ne peut se faire qu'entre « égaux », entre enfants. Le professeur doit renvoyer les questions aux équipes ;

- l'explication doit être nécessaire, techniquement et sociologiquement ; si le résultat est évident ou accepté par tous, on n'obtient qu'une recette ».

2B. Situation didactique, situation a-didactique, situation non didactique

La théorie des situations didactiques s'appuie sur l'hypothèse psychologique issue des travaux de Piaget : le sujet apprend en s'adaptant (assimilation et accommodation) à un milieu producteur de contradiction, de déséquilibres.

Guy Brousseau affirme qu'un milieu dépourvu d'intentions didactiques, est insuffisant pour produire les connaissances souhaitées chez le sujet. C'est à l'enseignant de proposer un environnement permettant à l'élève de s'adapter et ainsi à construire ses connaissances. Dans cette voie, Yves Chevallard précise : « L'enseignant n'a pas pour mission d'obtenir des élèves qu'ils apprennent, mais bien de faire en sorte qu'ils puissent apprendre. Il a pour tâche, non la prise en charge de l'apprentissage – ce qui demeure hors de son pouvoir – mais la prise en charge de la création des conditions de possibilité de l'apprentissage. »

Ainsi pour bien apprendre, l'élève doit s'approprier le problème que lui pose l'enseignant et perdre de vue l'intention didactique de l'enseignant.

« L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle» **[II.2-2]**. C'est ce type de situation que Guy Brousseau appelle situation a-didactique. Le préfixe « a »[1] signifie que l'intention d'enseigner a disparu de la situation.

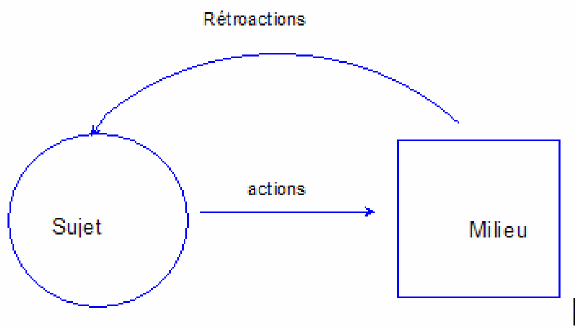
Il nomme **situation non didactique**, toute situation qui se présente au sujet dans laquelle il n'y a aucune intention d'enseignement. Ce sont par exemples les situations que l'élève rencontrera à la sortie de l'école et où il devra mettre en œuvre ses connaissances.

2C Milieu, concept de la didactique des mathématiques

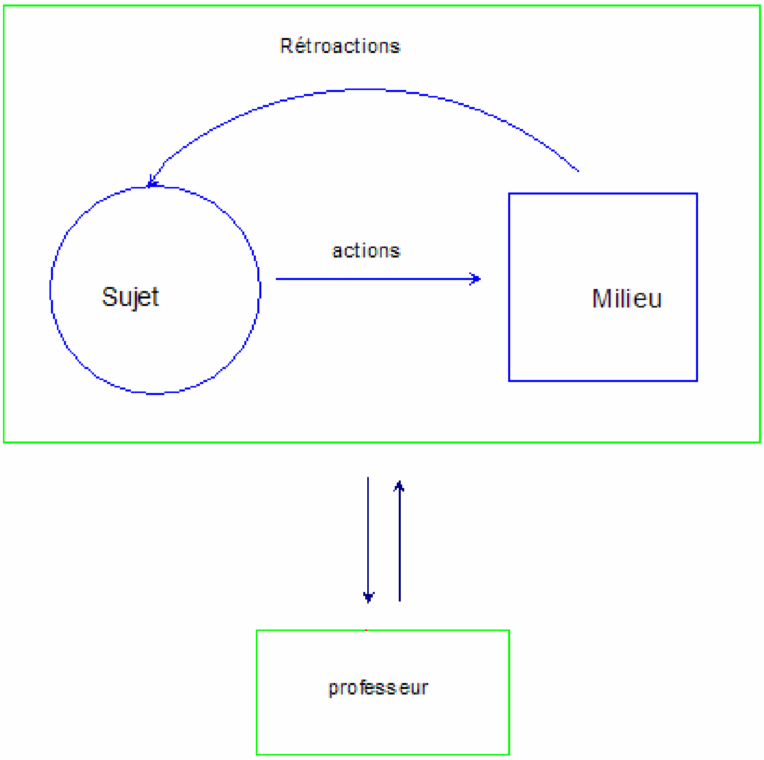
Nous l'avons déjà dit, d'après la théorie piagétienne, le sujet apprend en s'adaptant à un milieu. Guy Brousseau définit le milieu comme le système antagoniste de la situation. Le milieu renvoie au sujet des rétroactions

[1] préfixe dérivé du grec qui marque la privation

Dans le milieu, on peut y trouver des objets matériels (comme l'équerre, le compas, la calculatrice,..), des connaissances mathématiques ou non (comme la connaissance de l'algorithme de la division, des notions d'algèbre, …) et des conditions de fonctionnement (travail solitaire ou en groupe, autres élèves lors d'échange, …). Ainsi Marie-Jeanne Perrin-Glorian **[II.2-3]** parle de milieu matériel, de milieu cognitif et de milieu social



Le rôle de l'enseignant est d'organiser pour l'élève un milieu susceptible de rétroagir dans le sens souhaité. Il doit, par exemple, s'assurer que toutes les connaissances nécessaires à l'appropriation du problème soient présentes dans le milieu, que celui-ci renvoie des informations pertinentes à l'élève quant à l'avancée ou à la véracité de la résolution.



2D. Dialectiques au sens de Guy Brousseau

Dans la théorie des situations, Guy Brousseau repère quatre phases différentes dans le processus d'apprentissage :

- dialectique de l'action
- dialectique de la formulation
- dialectique de la validation
- dialectique de l'institutionnalisation

La dialectique de l'action correspond à une situation qui pose à l'élève un problème (dont la connaissance à enseigner est pertinente quant à la résolution) et sur laquelle il puisse agir sur le milieu et que celui-ci lui renvoie des rétroactions. Le milieu doit permettre à l'élève d'évaluer le résultat de son action, de modifier éventuellement cette dernière si nécessaire sans l'intervention de l'enseignant.

La dialectique de la formulation correspond à une situation où il y a au moins deux sujets. L'un des sujets doit formuler à (aux) l'autre(s) la connaissance (sous une forme quelconque) construite lors de la dialectique de l'action afin que ce dernier puisse l'utiliser pour agir sur le milieu. Il est indispensable que les sujets formulent, même de façon naïve, la connaissance visée et celle-ci doit pouvoir exister en tant que modèle implicite chez les sujets.

La dialectique de la validation est une situation où les différents sujets de la situation établissent la véracité de la connaissance construite. Cela suppose que tous reconnaissent des règles mathématiques, des théorèmes, une norme mathématique pour pouvoir décider du vrai et du faux.

La dialectique de l'institutionnalisation est le moment où la nouvelle connaissance va changer de statut. Elle va passer de son rôle de moyen de résolution à un rôle de savoir de référence. En effet, la situation d'institutionnalisation a pour objectif de faire entrer cette nouvelle connaissance dans le corpus des savoirs connus partagés par tous les acteurs de l'institution (élèves, professeur, …). Après cette phase, la connaissance est étiquetée en tant que savoir officiel, que les élèves doivent retenir et appliquer.

Il faut remarquer que ces quatre phases ne se déroulent pas aussi régulièrement de façon linéaire. Il y a souvent des aller-retour entre ces phases. On parle alors de moment d'institutionnalisation, de formulation, etc.. Ces différentes phases est une aide précieuse pour décomposer les processus et analyser les phénomènes d'enseignement observés et aussi pour construire des séquences d'enseignement.

2E. Contrat didactique

Les comportements des élèves et des enseignants semblent être régis par des habitudes ou des idées que se font les uns et les autres des mathématiques, de l'enseignement des mathématiques, de l'apprentissage des mathématiques. Ces habitudes et ces idées façonnent une sorte de contrat, évidemment très souvent implicite, entre l'enseignant et les élèves.

Le contrat didactique est donc l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant. Dans ce contrat, on ne s'intéresse qu'aux règles liées au savoir. Dans la relation entre élèves et enseignants, d'autres règles peuvent apparaître sans être liées au savoir, on parle alors de contrat pédagogique.

Le contrat didactique se révèle beaucoup dans des moments de rupture, dans le changement des habitudes, des consignes, dans les surprises exprimées.

C'est un outil pour accéder aux rationalités des élèves : il permet, dans beaucoup de cas, de donner du sens à des comportements mathématiques surprenants en apparence.

C'est aussi un outil pour comprendre les anticipations de l'enseignant quant à l'élaboration de ses séances d'enseignement, mais aussi pour comprendre les négociations que l'enseignant est amené à faire, et les décisions qu'il prend pour que la séance puisse continuer à fonctionner.

2E1 Exemples d'effets de contrat didactique

L'âge du capitaine

Le problème suivant a été posé à une centaine d'élèves de CE1 et CE2 dans l'académie de Grenoble : « Sur un bateau il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ? » On a observé que 75 % environ des élèves ont donné l'âge du capitaine en utilisant les nombres figurant dans l'énoncé. On a mené la même expérience avec des élèves plus âgés, même si la proportion d'élèves utilisant les nombres diminue, celle-ci reste non négligeable (environ un tiers pour une classe de CM2).

Le contrat didactique permet d'expliquer ce comportement des élèves.

Quand on a posé aux élèves la question : que penses-tu de ce problème ? Certains ont répondu clairement que ce problème était absurde, mais comme il fallait donner une réponse, ils l'ont produite ! L'élève Peter qui a répondu « le capitaine a 26 ans » ajoute « je trouve que c'est bien, mais je ne vois pas le rapport entre des moutons et un capitaine. ». Beaucoup d'élèves donnent une réponse qui a un sens (l'ordre de grandeur est plausible). Ce dernier point est complètement explicité par un élève avec un problème similaire : « Dans une bergerie, il y a 125 moutons et 5 chiens. Quel est l'âge du berger ? ».

Voici un extrait d'un interview entre un élève et le maître :

Elève – Ce problème est difficile… J'avais pas réfléchi qu'on pouvait faire 125 divisé par 5.

Maître – Tu aurais pu faire une addition ?

Elève – Oui

Maître – Combien tu aurais trouvé ?

Elève – 130.

Maître – *Tu aurais pu faire une soustraction ?*

Elève – J'aurai trouvé 120.

Maître – Quel est l'âge du berger ? (silence)

Pourquoi fais-tu une division ? (silence)

Elève – Je ne sais pas (silence) parce que 125 + 5 = 130 et c'est un peu gros et 125 – 5 = 120 c'est gros aussi tandis que 125 : 5 = 25 ça va mais je ne sais pas si c'est juste.

Maître – Pourquoi tu hésites ? tu es pas sûre que c'est 25 ans ?

Elève – Je pense que c'est 25 ans.

Un autre élève devant un problème similaire répond à l'enseignant : « c'est de ta faute, tu ne m'as pas donné les bons nombres ».

On remarque bien que les élèves cherchent à tout prix à répondre à la question, cherchent une opération qui donne un résultat vraisemblable. Donner un résultat à un problème est essentiel aux yeux de ces élèves et ces réponses ne sont donc pas significatives d'une incompréhension totale du problème. A travers ces exemples, la notion de contrat didactique met en lumière que dans l'acte d'enseigner ou d'apprendre, des paramètres, autres que le savoir en lui-même, sont incontournables pour comprendre ces processus.

La géométrie au collège

Quand on demande à des élèves de CM2 de déterminer si deux droites tracées sur une feuille sont perpendiculaires, le seul moyen qu'ils ont de répondre est d'utiliser leur équerre et de vérifier si les bords de l' équerre correctement placée correspondent avec les deux droites tracées. Par la suite, au collège, ce contrat par rapport au dessin va évoluer. En fin de collège, l'équerre ne sera plus un moyen de validation et le statut de la figure a changé. L'élève devra au cours du collège apprendre à travailler avec des objets abstraits (points, droites, angles,..) qui sont représentés par des dessins géométriques et le contrat voudra que l'on travaille avec ces objets abstraits et non plus avec les dessins les représentant.

Ce qui rend l'enseignement de la géométrie difficile au collège, c'est que ce changement de contrat n'est pas perçu en même temps par les élèves alors que la pratique de la classe le voudrait.

2E2 D'autres exemples.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples très classiques de règles de contrat :

- dans un problème de mathématiques, il y a toujours une solution et l'enseignant la connaît ;
- dans l'énoncé, toutes les données sont nécessaires et aucune n'est superflue ;
- les résultats obtenus sont toujours des nombres simples (sinon, cela signifie qu'il y a une erreur) ;
- tout problème de mathématiques se résout à l'aide d'un calcul ;
- etc.

2E3 Quelques effets bien identifiés de contrat didactique.

Le professeur a envie que ces élèves réussissent et a tendance à leur faciliter la tâche, très souvent de manière inconsciente. Ainsi Guy Brousseau a relevé plusieurs effets de contrat allant dans ce sens :

L'effet Topaze

Dans la pièce du même nom de Marcel Pagnol, Topaze est un précepteur qui veut que son élève réussisse la dictée qu'il est en train de faire, l'aide de manière détournée :

« Topaze, il dicte en se promenant. "Des moutons... des moutons... étaient t-en sûreté... dans un parc ; dans un parc. (Il se penche sur l'épaule de l'élève et reprend.) Des moutons... moutonss... (L'élève le regarde, ahuri.) Voyons, mon enfant, faites un effort. Je dis moutonsse. Étaient (il reprend avec finesse) étai-eunnt. C'est-à-dire qu'il n'y avait pas qu'un moutonne. Il y avait plusieurs moutonsse." »

Quand un tel phénomène se produit, il est clair que l'élève n'accomplit pas de lui-même la tâche et n'agit qu'en fonction des attentes de l'enseignant. Il faut remarquer que cette situation se rencontre fréquemment dans la classe, cela permet à l'enseignant de débloquer, à moindre coût, une situation d'enseignement.

L'effet Jourdain

Dans la pièce « Le bourgeois gentilhomme » de Molière, le maître de philosophie révèle à Jourdain ce qu'est la prose. Le comique de cette scène est fondée sur le ridicule de cette découverte d'une « chose » très banale et de l'avoir sacralisée comme étant une connaissance supérieure. Cet effet permet à l'enseignant d'éviter l'apprentissage d'un savoir en faisant croire que celui-ci est acquis par la manifestation d'un geste a priori banal.

Le glissement métacognitif

Il s'agit dans ce cas de changer d'objet d'étude en cours de route, par exemple prendre une technique relative à un savoir comme objet d'étude et perdre de vue le véritable savoir à enseigner. Cet effet se rencontre très souvent et permet à l'enseignant de poursuivre son enseignement en modifiant ses objectifs. Par exemple, au lieu d'enseigner le concept de proportionnalité, on enseigne la technique des tableaux de proportionnalité. Un élève apprend à remplir des tableaux de proportionnalité, sans pour autant travailler le concept. Un autre exemple est celui des tableaux de signe en classe de seconde.

L'usage abusif de l'analogie

Dans ce cas, on utilise l'analogie pour faire admettre et apprendre une connaissance en explicitant les similarités. Les élèves, pour résoudre un problème recherchent des éléments d'analogie, très souvent superficiels et leur solution n'est pas le résultat d'une véritable recherche d'investissement lié au problème. Un des exemples les plus évidents est d'assimiler les nombres relatifs à des gains et pertes. Cette analogie convient tout à fait pour comprendre l'addition ou la soustraction de nombres relatifs mais devient inopérante pour la multiplication.

2F. Variable didactique.

Guy Brousseau a été amené, en examinant différentes situations didactiques, à repérer le rôle particulier de diverses caractéristiques. En changeant la valeur de ces caractéristiques, les stratégies des élèves vont s'en trouver modifier. On peut donc définir une variable didactique comme une variable dont la valeur a une influence forte sur le comportement mathématique des élèves.

Prenons l'exemple suivant :

Un train roule toujours à la même vitesse. Il met 6 minutes pour parcourir 9 kilomètres et 10 minutes pour parcourir 15 kilomètres.

Quelle est la distance parcourue en 16 minutes ?

Quelle est la distance parcourue en 30 minutes ?

Examinons les différente stratégies possibles de résolution :

<u>Procédure n°1</u> : Déterminer le coefficient de proportionnalité entre la distance et le temps (c'est-à-dire la vitesse du train)

Le train a une vitesse égale à $\frac{9}{6}$ = 1,5 kmh^{-1}. Il parcourt donc $1{,}5 \times 16 = 24$ km en 16 minutes et $1{,}5 \times 30 = 45$ km en 30 minutes.

Procédure n°2 : Utiliser les propriétés de linéarité de la proportionnalité

On remarque que 16 est égal à 6 + 10, donc le train a parcouru 9 + 15 = 24 km en 16 minutes. De même, on remarque que 30 est égal à 3 × 10, donc le train a parcouru 3 × 15 = 45 km en 30 minutes.

Procédure n°3 : Utiliser les tableaux de proportionnalité.

On doit compléter le tableau suivant :

Durée (en minutes)	6	10	16	30
Distance (en km)	9	15	?	?

On peut alors utiliser le calcul de la quatrième proportionnelle :

En 16 minutes, le train parcourt $\frac{16 \times 9}{6}$ = 24 km ou $\frac{16 \times 15}{10}$ = 24 km. De même, en 30 minutes, le train parcourt $\frac{30 \times 9}{6}$ = 45 km ou $\frac{30 \times 15}{10}$ = 45 km.

Procédure n°4 : ajouter la moitié

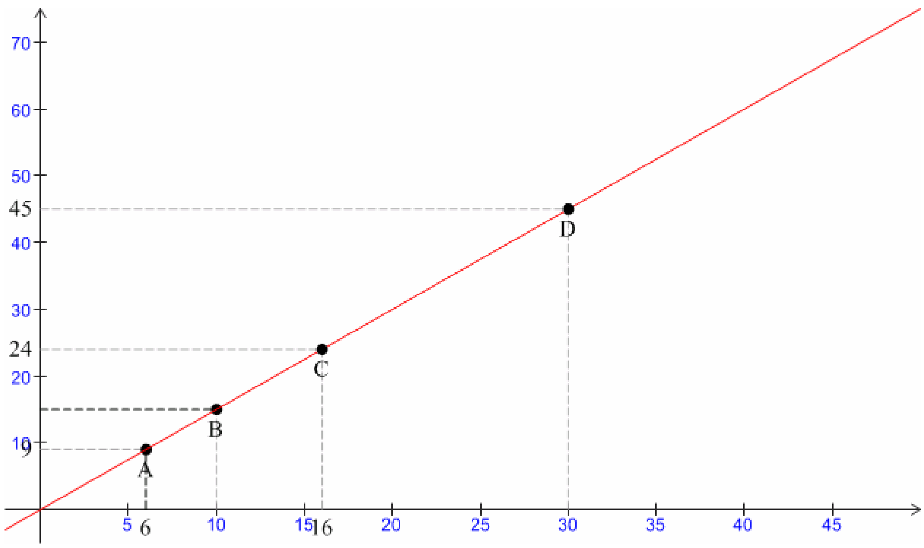
On peut remarquer que pour passer des valeurs des durées aux valeurs des distances, il suffit d'ajouter la moitié du nombre.

En effet $6 + \frac{6}{2} = 9$ et $10 + \frac{10}{2} = 15$. Donc le train parcourt $16 + \frac{16}{2} = 24$ km en 16 minutes et $30 + \frac{30}{2} = 45$ km en 30 minutes.

Procédure n°5 : utiliser un graphique

On sait que la situation de proportionnalité se traduit graphiquement par une droite passant par l'origine. On connaît deux points de cette droite : A(6 ; 9) et B(10 ; 15). Le problème revient à connaître les ordonnées des points d'abscisse 16 et 30.

On peut lire aisément ces deux ordonnées : 24 et 30.



Examinons les différentes variables didactiques de cette situation.

• la présence de deux couples (durée, distance) et de leur lien

L'énoncé comporte trop d'informations, il est inutile de donner la distance parcourue en 6 minutes et en 10 minutes. Une seule des ces données est nécessaire. Nous sommes en présence d'une variable didactique. En effet, la présence de deux données conditionne la réalisation de la procédure n°2. Le choix de 6, 10, 16 et 30 permet aussi cette réalisation. Il est clair qu'avec le choix 6, 8, 17 et 29, cette procédure est bloquée.

• le coefficient de proportionnalité

Dans cette situation, le coefficient de proportionnalité est un nombre décimal « simple » : 1,5. Ceci permet d'effectuer les calculs de la procédure n°1 sans trop de difficultés techniques. Cette dernière aurait été nettement plus délicate si le coefficient de proportionnalité était un nombre décimal avec quatre ou cinq chiffres après la virgule ou s'il n'était même pas décimal. Certains élèves auraient été ainsi bloqués par le niveau de technicité des calculs. D'autre part, sa valeur est très particulière : 1,5. Pour multiplier par 1,5, il suffit d'ajouter la moitié du nombre initial. Cela permet à un élève qui n'a pas encore complètement intégré le sens de la multiplication par des décimaux, d'obtenir le résultat. Modifier la valeur de ce coefficient risque alors de bloquer la procédure n°4.

• la nature des nombres de l'énoncé et de ceux des résultats

Il est à remarquer que tous ces nombres sont entiers. Cela facilite la réalisation du graphique et permet aussi la lecture des ordonnées. Serait été tout autre de « lire » 16,875 km si la durée de trajet avait été de 11 minutes 15 secondes !

Nous pouvons donc conclure que l'étude des variables didactiques est incontournable si l'on souhaite que les élèves mettent en œuvre une démarche de résolution bien précise. Nous sommes alors amenés à introduire la notion **d'ingénierie didactique [II.2-16]**. C'est le processus de recherche s'intéressant à la préparation, à la réalisation et à l'analyse de situations didactiques et au contrôle de leur mise en œuvre**.**

On peut y repérer quatre phases :

- l'analyse préalable : analyse épistémologique des contenus, analyse des programmes d'enseignement, analyse des conceptions, difficultés et obstacles des élèves
- l'analyse a priori de la situation ou de l'énoncé : stratégies possibles de résolutions, repérage des variables didactiques,
- la réalisation didactique proprement dite
- l'analyse a posteriori : analyse des données recueillies lors du déroulement en relation avec l'analyse préalable et a priori

Cette étude est nécessaire si l'on veut s'assurer d'un minimum de **reproductibilité** des situations didactiques.

2G. Exemples d'ingénierie didactique : problèmes ouverts et situations-problèmes

Rappelons que nous entendons *ingénierie didactique* comme le processus de recherche s'intéressant à la préparation, à la réalisation et à l'analyse de situations didactiques et au contrôle de leur mise en œuvre. Notons qu'ici le terme *ingénierie* peut être aussi pris dans le sens plus général de « l'ensemble des activités de conception, d'étude, de projet, de réalisation, d'aide au fonctionnement et d'évaluation des moyens techniques d'enseignement et de formation » ainsi qu'il est défini dans le Journal Officiel (J.O. du 11 septembre 1992 p. 12522)

2G1. Les problèmes ouverts

Considérons le problème suivant :

Le nombre 23 peut s'écrire de plusieurs façons comme somme d'entiers : *Par exemple 23 = 11 + 5 + 7.*

Trouver parmi ces sommes, celle dont le produit des termes est maximum. Peut-on généraliser ?

Imaginons la démarche possible d'un élève de CM2 ou de sixième confronté à ce problème.

Ce n'est pas un problème pour lequel il possède une technique particulière de résolution, ce dernier ne faisant pas partie de l'ensemble classique des problèmes proposés aux élèves.

Notre élève peut, en revanche, faire quelques essais.

En prenant $23 = 11 + 5 + 7$, alors le produit $P = 11 \times 5 \times 7 = 385$

De même $23 = 11 + 12$, alors $P = 11 \times 12 = 132$.

$23 = 4 + 5 + 7 + 7$, alors $P = 4 \times 5 \times 7 \times 7 = 980$

Avec ces différents essais, l'élève est amené à établir différentes constatations :

- le produit n'est pas toujours constant (ce qui a priori n'est pas évident, la somme est constante, mais le produit ne l'est pas)
- le produit semble augmenter en même temps que le nombre de termes de la somme.

Cette deuxième constatation peut être considérée comme une conjecture que l'élève devra démontrer ou infirmer avec un contre-exemple.

Il essaie :

En prenant $23 = 5 + 5 + 5 + 5 + 3$, alors $P = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 = 1075$.

De même $23 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3$, alors $P = 4^5 \times 3 = 3072$

$23 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2$, alors $P = 3^7 \times 2 = 4374$

$23 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1$ alors $P = 2^{10} \times 1 = 1024$.

Le dernier calcul invalide la conjecture, car cette somme a 11 termes et pourtant le produit est inférieur à la somme précédente qui comportait 8 termes.

En refaisant éventuellement différents essais, il peut être amené à formuler la conjecture suivante : le produit est maximum quand le nombre de départ est décomposé avec un maximum de 3.

En examinant le nombre 4, il peut invalider cette conjecture car $4 = 3 + 1 = 2 + 2$ et pourtant $3 \times 1 = 3 < 2 \times 2$. Il pense, et risque même d'être complètement persuadé, que le produit maximum est égal 4374.

Voilà de manière fictive mais néanmoins plausible ce qu'un élève (ou un groupe d'élèves) de CM2 ou de Sixième peut, dans certaines conditions que nous examinerons, réaliser pour avancer dans la solution de ce problème.

Écrivons maintenant une preuve de ce résultat. Montrons que si dans une décomposition de 23 il y a une nombre *a* supérieur ou égal à 5, il vaut mieux alors décomposer *a* en $a - 3$ et 3. En effet, montrons que $3 \times (a - 3) > a$ dès que *a* est supérieur ou égal à 5. Cette inégalité revient à : $2a > 9$, c'est-à-dire $a > 4{,}5$. Comme *a* est un entier, cela signifie que *a* est supérieur ou égal à 5. Ceci prouve que dans une décomposition, il ne restera que des entiers inférieurs ou égaux à 4. Montrons maintenant qu'il ne peut y avoir plus d'un seul 4 dans la décomposition. En effet, si on a deux 4, la somme fait 8. Il vaut mieux décomposer 8 en 3 + 3 + 2 car $3 \times 3 \times 2 = 18 > 4 \times 4 = 16$. Montrons maintenant qu'il ne peut y avoir de 1, ni de 0 dans la décomposition. En effet : $1\times (a - 1) < a$ et $0 \times a < a$. S'il y a des 2 dans la décomposition, on peut remplacer deux 2 par un 4. Cela ne change rien car $2\times2 = 4$ et $2 + 2 = 4$. Ainsi dans la décomposition, il y a des 3 et au maximum un 2 et un 4. Mais le 2 et 4 ne peuvent être en même temps dans la décomposition car :

$$2 + 4 = 3 + 3 \text{ et } 2 \times 4 < 3 \times 3.$$

En résumé, dans la décomposition il n'y a que des 3 et éventuellement un 2 ou un 4.

Ainsi 23 =3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2. Le produit est alors : $3^7 \times 2 = 4374$.

Pour le lecteur intéressé par la généralisation de ce problème, la solution est la suivante :

Si N (le nombre à décomposer) est divisible par 3, donc si $N = 3k$, alors P le produit maximum est égal à 3^k.

Si N est un multiple de 3 plus 1, donc si $N = 3k + 1$, alors $P = 3^{k-1}\times 4$.

Si N est un multiple de 3 plus 2, donc si $N = 3k + 2$, alors $P = 3^k \times 2$.

Ce problème que nous venons de traiter est un **problème ouvert**. Ce type de problème a été introduit par une équipe de professeurs **[II.2-4]** de l'IREM de Lyon dans les années 1980. Voilà la définition que donne l'IREM de Lyon :

Un problème ouvert est un problème dont l'énoncé court et compréhensible ne contient ni la méthode, ni la solution et permet à chacun qui le cherche de faire des essais.

Examinons maintenant les raisons de chaque caractéristique.

L'énoncé doit être court et compréhensible, cela permet à l'élève de s'approprier rapidement de problème, de s'en faire une première représentation. C'est une condition indispensable pour que l'élève s'engage dans la résolution.

Cet énoncé ne doit pas indiquer de méthode, ni de solution. Un problème ouvert est un problème de recherche, donc l'élève n'a pas immédiatement à sa disposition une démarche de résolution. Ce n'est donc pas un problème déjà rencontré. Il ne donne pas non plus la solution. Ce n'est donc pas un problème du type « montrer que » ou avec des questions intermédiaires pour mettre l'élève sur la voie. Ce problème essaie de mettre l'élève vraiment en position de chercheur.

La troisième caractéristique est aussi fondamentale, car elle permet à l'élève de s'engager dans une action réelle. Il ne suffit pas que l'énoncé soit compréhensible et court pour que l'élève s'engage, il est indispensable que le sujet puisse agir immédiatement, sinon il risque d'abandonner rapidement. Cette caractéristique impose aussi que le problème soit dans un domaine conceptuel au niveau des mathématiques pas trop éloigné de celui de l'élève. Il ne faut pas que les concepts en jeu dans le problème soient un obstacle pour l'élève.

Revenons maintenant sur les objectifs du problème ouvert :

- mettre l'élève en position de chercheur, comme nous l'avons dit, donc en rapprochant le plus possible la position de l'élève à celle du mathématicien professionnel ;
- permettre à l'élève de débattre, de chercher une preuve pour se convaincre et non pour répondre à une question dont la réponse ne fait aucun doute ;
- faire acquérir à l'élève des connaissances (ou métaconnaissances) liées à la résolution de problèmes ;
- modifier la représentation des élèves sur la recherche de problème, c'est-à-dire proposer aux élèves une rupture de contrat didactique concernant ce point. Habituellement un « bon élève » doit rapidement résoudre les problèmes, ceux-ci n'ont qu'une seule solution et elle est à chercher dans les derniers savoirs appris.

Examinons la gestion du problème ouvert en classe suggérée par l'IREM de Lyon. Celle-ci comporte plusieurs phases :

<u>Phase 1</u> : recherche personnelle

L'élève cherche seul le problème pendant quelques minutes. Cette recherche a pour but que l'élève comprenne l'énoncé et commence à agir, c'est-à-dire en faisant déjà quelques essais.

<u>Phase 2</u> : recherche en groupe

Les élèves se répartissent dans la classe en groupe de trois ou quatre élèves et ont pour mission de résoudre le problème et d'écrire une solution à destination de la classe entière. Nous remarquons ici l'importance de la première phase ; les élèves se regroupent une fois que chacun s'est déjà représenté le problème et a probablement avancé dans la solution. C'est un facteur facilitant les vrais échanges entre élèves, on limite ainsi le risque qu'un élève monopolise la pensée du groupe et ne permette pas aux autres de s'exprimer.

Dans ce temps, les élèves rédigent une solution ou le résultat de leur recherche sur une affiche.

<u>Phase 3</u> : débat dans la classe de recherche de preuves

Les élèves prennent connaissance des affiches de tous les groupes (ou seulement de quelques groupes si la classe est nombreuse) et débattent sur chacune d'elle sur la véracité de ce qui est écrit. Lors de cette phase, les élèves doivent apprendre à s'écouter, à se répondre, à se convaincre par des arguments mathématiques et non d'autorité.

<u>Phase 4</u> : synthèse de la recherche

Cette synthèse est réalisée conjointement avec l'enseignant et les élèves, elle a pour but d'institutionnaliser les connaissances apparues dans cette recherche. Ce ne sont pas obligatoirement des connaissances mathématiques *stricto sensu*, mais il s'agit de revenir par exemple, sur la pertinence de telle solution ou sur la notion de contre-exemple, de conjecture. Le rôle de l'enseignant lors de la gestion d'un problème ouvert est aussi à regarder de près.

Pendant la phase de recherche individuelle, il doit s'assurer que les élèves ont bien compris le problème et donc ne cherchent pas un autre problème. Un simple regard sur ce que font les élèves pendant cette phase suffit pour s'assurer de cela.

Lors de la recherche en groupe, l'enseignant devra veiller à laisser la responsabilité de la recherche aux élèves. En effet, dans le contrat didactique habituel, quand un élève pose une question lors de la recherche d'un exercice, l'enseignant répond dans le but d'aider l'élève à aboutir à la solution. Ici, l'enseignant doit faire vivre la recherche du groupe, il doit relancer celle-ci si cette dernière « patine ». Lors d'une question d'un élève du groupe, il doit être attentif à la renvoyer au groupe et non pas répondre à l'élève, sinon l'élève verra qu'il suffit de poser des questions au professeur pour obtenir la solution. La recherche est alors tuée, le côté a-didactique de cette situation aurait disparu.

La phase de débat dans la classe est la plus difficile à gérer pour l'enseignant. Il doit s'assurer que les élèves s'écoutent, se répondent, se préoccupent du même problème, c'est-à-dire qu'ils prennent en compte le point de vue des autres. Lors de cette phase, l'enseignant doit rester le plus possible neutre vis à vis des argument énoncés. Son rôle principal est un rôle d'animateur, il permet à la classe d'échanger sur des procédures mathématiques.

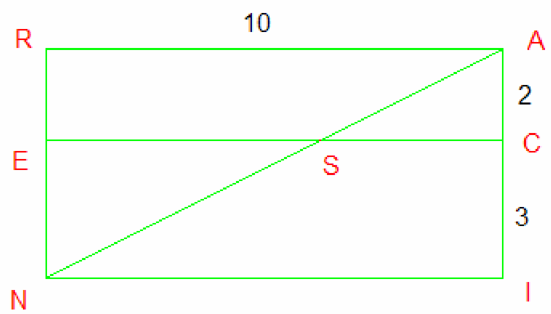
Dans la phase de synthèse, l'enseignant reprend un rôle plus habituel pour lui. Il va institutionnaliser, avec l'aide des élèves, ce qu'il faut retenir de cette recherche de problème ouvert.

Nous pouvons constater que nous retrouvons les différentes dialectiques de la théorie des situations lors du déroulement d'un problème ouvert comme il est indiqué plus haut.

2G2. Les situations problèmes.

Considérons le problème **[II.2-5]** suivant proposé à des élèves de Troisième :

Soit RAIN est un rectangle.
Les droites (EC) et (IN) sont parallèles.
Calculer la valeur exacte de SN



Résolvons le problème.

Procédure n°1

En appliquant le théorème de Thalès dans les triangles ACS et AIN, on obtient :

$\frac{AS}{AN} = \frac{AC}{AI}$, or AC = 2, AI = 5 et AN = $\sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125}$ d'après le théorème de Pythagore dans le triangle ANI.

Donc AS = $\frac{2}{5}\sqrt{125}$, d'où SN = AN – AS = $\sqrt{125} - \frac{2}{5}\sqrt{125} = \frac{3}{5}\sqrt{125}$.

Procédure n°2

En appliquant le théorème de Thalès dans les triangles ACS et AIN, on obtient :

$\frac{SC}{NI} = \frac{AC}{AI}$, d'où SC = $\frac{2 \times 10}{5} = 4$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ESN, on obtient : SN = $\sqrt{EN^2 + ES^2}$,

Or ES = EC –SC = 10 – 4 = 6.

D'où SN = $\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$.

Procédure n°3

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ANI : AN = $\sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125}$

En appliquant le théorème de Thalès dans les triangles ACS et AIN, $\frac{SC}{NI} = \frac{AC}{AI}$, d'où SC = $\frac{2 \times 10}{5} = 4$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ASC : AS = $\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$.

D'où SN = AN – AS = $\sqrt{125} - \sqrt{20}$.

D'autres procédures sont possibles, en utilisant par exemple, la trigonométrie, mais elles donnent a priori un résultat déjà trouvé dans les trois premières.

D'après ce qui précède, il est clair que $\frac{3}{5}\sqrt{125} = \sqrt{45} = \sqrt{125} - \sqrt{20}$.

Ce problème est un exemple de situation-problème. Régine Douady **[II.2-6]** a caractérisé ces situations que l'IREM de Lyon a appelé **situation-problème** :

- l'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème. L'élève peut envisager ce qu'est une réponse possible du problème ;
- les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème ;
- la situation-problème doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas ;
- la connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l'élève ;
- le problème peut se formuler dans plusieurs cadres théoriques entre lesquels on peut établir des correspondances.

Notons la similitude des caractéristiques de la situation-problème avec celles du problème ouvert. La différence fondamentale réside dans l'objectif de l'apprentissage. En effet, dans une situation-problème, un savoir mathématique précis est visé puisqu'il va être la clé de la résolution du problème. Ainsi, en proposant aux élèves une situation-problème, l'enseignant s'assure que les élèves vont rencontrer tel savoir et la situation-problème est alors à la base de la construction de ce savoir par les élèves.

Si nous reprenons l'exemple ci-dessus, l'objectif visé est l'acquisition des règles de calcul sur les racines carrées. Les élèves sont confrontés à différentes expressions égales de la même mesure. L'enseignant met les élèves en position de chercher à savoir comment on peut affirmer algébriquement que ces différents résultats ($\frac{3}{5}\sqrt{125}$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{125} - \sqrt{20}$) sont égaux. Ils vont construire par eux-mêmes les règles suivantes :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b},\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ ;\ \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b} \text{ pour } a \text{ et } b \text{ positifs.}$$

Ils ne vont peut-être pas les démontrer mais ces règles sont présentées comme un outil de résolution d'un problème et la démonstration interviendra comme une réponse. La gestion d'une situation-problème est identique à celle d'un **problème ouvert**. Évidemment lors de la phase de synthèse, l'enseignant institutionnalisera le savoir visé.

2G3. Approche de l'apprentissage fondé sur le tâtonnement expérimental de l'apprenant.

Cette notion d'apprentissage humain fondé sur le tâtonnement expérimental individuel du sujet ou collectif du groupe apprenant a été particulièrement développée dans le cadre d'un courant pédagogique initié dans les années 1920 par Célestin Freinet[2] (1896-1966). Ce courant pédagogique organisé au sein de l'ICEM-Pédagogie Freinet (Institut Coopératif de l'Ecole Moderne) dont les activités de recherche et d'innovation pédagogique perdurent jusqu'à nos jours. L'œuvre pédagogique de Célestin Freinet dont le rayonnement est international fait partie de l'histoire des grands courants pédagogiques. L'idée de base contenue dans l'expression « libres recherches mathématiques », apparentée d'ailleurs à celle du « texte libre » en relation à l'apprentissage de la langue maternelle, seconde ou étrangère, est de reproduire, en quelque sorte, l'activité heuristique et créatrice du mathématicien à partir de problèmes inscrits dans des situations vécues des enfants ou des adolescents. Dans le domaine de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, de nombreux travaux **[II.2-9]** ont été réalisés et publiés au travers d'ouvrages et de revues de l'ICEM. Au niveau du collège, Edmond Lemery **[II.2-10]** a tenté d'apporter un témoignage méthodiquement et rigoureusement rapporté pour répondre à la question suivante : « *comment, en partant de situations familières, vécues dans son environnement, de ses préoccupations imaginatives, de ses intérêts réels, de ses questions, de ses actions, mais aussi d'abstractions déjà connues de lui, l'adolescent peut-il aboutir, par cette libre recherche, selon le processus du tâtonnement expérimental, avec la coopération du groupe, du maître, à la construction progressive de modèles qui constitueront son univers mathématique ?* » Au niveau du lycée, Jean-Claude Régnier **[II.2-11] [II.2-12] [II.2-13]** a tenté, dans le cadre de la didactique des mathématiques, de décrire des situations d'enseignement-apprentissage permettant l'activation du processus du tâtonnement expérimental. Nous synthétisons son approche développant une ingénierie pédagogique et didactique intégrant la conception de l'apprentissage fondé sur le tâtonnement expérimental. Notons qu'ici le terme *ingénierie* est pris dans le sens de « l'ensemble des activités de conception, d'étude, de projet, de réalisation, d'aide au fonctionnement et d'évaluation des moyens techniques d'enseignement et de formation. (J.O. du 11 septembre 1992 p. 12522) ». Jean-Claude Régnier **[II.2-14]** écrit que **«** Pour instrumenter, organiser et réguler son action d'enseignement, l'enseignant s'appuie sur une théorie de l'apprentissage humain. En transférant le concept de *théorème-en-acte* introduit par Gérard Vergnaud **[II.2.15]** elle est *a minima* une *théorie-en-acte*, fondée sur l'échange entre les pairs, sur l'expérience professionnelle quotidienne et sur une psychologie populaire fournissant ses modèles de compréhension et d'explication à partir de concepts quotidiens, à laquelle se réfère implicitement son action d'enseignement. Toutefois, la formation universitaire et la formation professionnelle des enseignants permettent d'accéder à des connaissances théoriques qui réorientent ces références vers des théories scientifiques de l'apprentissage, sans pour autant, d'ailleurs, chasser complètement le recours à des concepts quotidiens pour parler du processus d'apprentissage dont il a le projet de stimuler l'activation par son action d'enseigner. L'enseignant en tant que sujet est lui-même capable d'apprendre. En tant qu'enseignant, nous-même, n'échappons nullement à ce constat.

Notre conception pédagogique tire son origine des conceptions pédagogiques développées par Célestin Freinet pour qui le tâtonnement expérimental **[II.2-16]** constitue un processus universel présent dans une classe d'activités humaines à laquelle appartient aussi l'apprentissage. Il s'est agi de notre première tentative d'explicitation d'une théorie de l'apprentissage humain à laquelle nous nous référons. Précisons dès maintenant, que

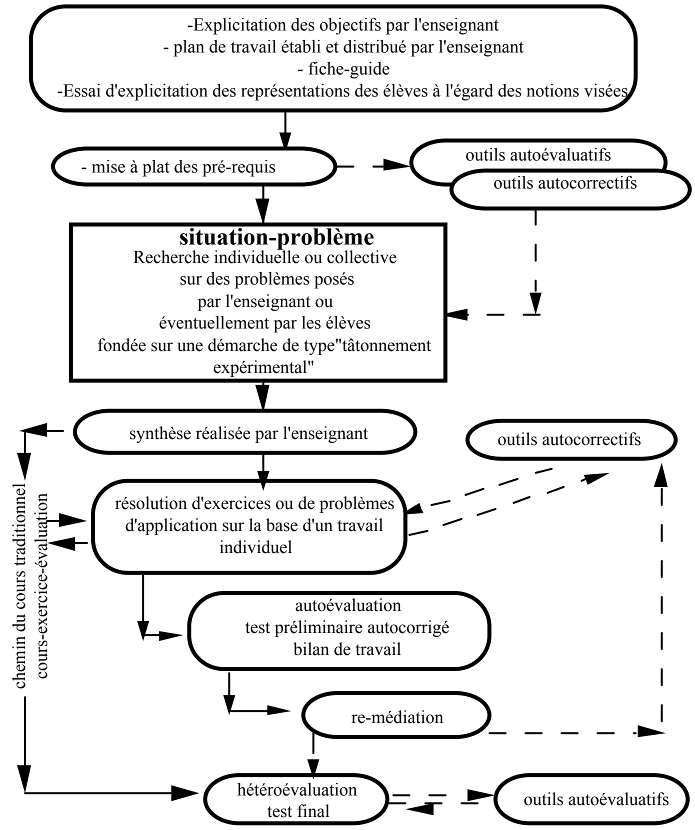
---

[2] ICEM Institut Coopératif de l'École Moderne Pédagogie Freinet : http://www.icem-pedagogie-freinet.org/

l'expérience tâtonnée dont il est question, ne relève nullement de la conception de Thorndike. Elle ne se confond pas, sauf par une analogie abusive, avec un tâtonnement mécanique renvoyant à une conception de l'apprentissage comme l'écrit Vygotski, parlant de la conception de Thorndike **[I.1-17]** «un processus mécanique dépourvu de sens, qui conduit, au moyen d'essais et erreurs, à d'heureux résultats.» La méthode du tâtonnement expérimental n'est pas la méthode des essais et des erreurs. Nous avons tenté d'expliciter et de discuter le sens que nous lui donnions, en relation à une approche praxéologique de notre activité d'enseignement. Selon nous : « En présence d'une circonstance nouvelle (...) l'individu va se mettre à tâtonner, c'est à dire partant de ses acquis actuels inadéquats pour apporter automatiquement une solution satisfaisante, il va essayer selon divers chemins de produire une réponse. (...) Ce tâtonnement est régulé par un ensemble de facteurs qui peuvent avoir un caractère soit contingent, soit nécessaire, soit encore aléatoire. De la part de l'apprenant, celui-ci résulte d'une intention d'action qui oriente le fonctionnement et détermine la coordination des mécanismes. (...) Son caractère expérimental provient du fait que l'individu réfléchit et raisonne tout en tâtonnant.» Dans ce processus, le statut de l'erreur se différencie de son statut scolaire habituel. Nous écrivions alors que « l'erreur n'est le fruit ni d'une "lacune", ni d'un "manque de travail" (au sens scolaire), ni une quelconque "violation d'une règle imposée par un code, conduisant à une attitude répréhensible et regrettable". L'erreur est le résultat de la mise en oeuvre de procédures inadéquates et non pertinentes dans la situation problème de procédures non conformes aux modèles rationnels attachés au problème. » À cette notion d'erreur, nous attachions subséquemment celles de réussite et d'échec pour parvenir à la question du statut de l'acte réussi. Nous pensons que cet acte réussi est un événement déterminant dans le processus d'apprentissage. Son retentissement affectif est manifeste. Aujourd'hui, nous souhaiterions mieux comprendre son lien avec le développement cognitif dans une perspective autre que celle d'un renforcement positif.(…) Enfin, nous notions d'une certaine manière, le caractère d'instrument psychologique par lequel nous pouvions interpréter le tâtonnement expérimental qui, comme nous l'écrivions, « constitue (...) un ensemble de techniques d'investigation et de démarches de réflexion que se construit un individu avec l'aide de l'enseignant, d'un pair ou d'un outil.» Cette instrumentation psychologique constitue alors un facteur du développement de l'autonomie du sujet en ce qu'elle amplifie ses capacités d'investigation.

Dans **[II.2-12]** nous avons tenté de savoir en quoi le tâtonnement expérimental était possible en mathématiques. Par une approche spéculative, nous avons mis en évidence la dépendance de cette possibilité avec la conception des mathématiques. Si la conception platonicienne et celle constructiviste de Brouwer s'accordent bien avec l'idée d'expérience tâtonnée pour atteindre les objets mathématiques, la conception formaliste ne lui laisse aucune place à un sens. Quoi qu'il en soit, en prenant l'expérience tâtonnée dans le sens élargi de "fait d'éprouver quelque chose, considéré comme un élargissement ou un enrichissement des connaissances, du savoir ou des aptitudes", elle prend alors un sens dans le champ des mathématiques du point de vue de l'apprenant. Son expérience commence avec la manipulation concrète ou mentale d'objets mathématiques ou paramathématiques. Elle se prolonge dans des activités de mathématisation ou de modélisation. »

Par la médiation de séquences didactiques intégrant les processus d’apprentissage fondé sur le tâtonnement expérimental l’auto-évaluation et l’autocorrection, nous avons explicité une méthode pédagogique schématiquement représentée par l'organigramme ci-dessous



Sa limite réside dans le fait qu'il ne rend pas suffisamment compte des dimensions pédagogiques attachées à la gestion coopérative de la classe, à la place et au rôle du journal de classe à expression mathématique, du détail des activités de *libre recherche* et des pratiques d'autocorrection et d'auto-évaluation.

Les dialectiques de l'action, de la formulation et de la validation de la théorie de situations didactiques de Guy Brousseau qui ont été présentées plus haut, se retrouvent dans la phase intitulée «situation-problème » ainsi que la dévolution du problème. La dialectique de l'institutionnalisation se retrouve dans la phase « Synthèse par l'enseignant ». À partir de cette phase, il serait possible de retrouver un chemin qu'emprunte plus habituellement la pédagogie traditionnelle avec le paradigme cours-exercices d'application-évaluation par reproduction des exercices d'application.

Nous avons expérimenté ce modèle à propos du concept scientifique de fonction en mathématiques et en statistique. Nous rendons compte en détail dans l'article **[II.2-11]** de l'efficacité et de l'opérationnalité du modèle. Aujourd'hui nous pensons qu'il s'enrichirait d'être re-visité à la lumière des concepts de champ conceptuel de Gérard Vergnaud **[II.2-15]**.

2H Obstacles et erreurs

2H1 La place de l'erreur dans l'apprentissage

Ici nous allons nous intéresser aux erreurs que des élèves commettent tout au long du processus d'apprentissage des mathématiques. Le sens que nous donnons à ces erreurs s'appuie sur les caractéristiques suivantes :

- Elles ne sont pas des erreurs pour celui qui les commet.

- Elles sont constitutives du sens de la connaissance acquise par un sujet.
- Elles sont un état des connaissances d 'un sujet à un moment donné de son développement.

Ces erreurs auxquelles nous nous limitons possèdent aussi les trois caractéristiques qui viennent compléter les précédentes :

- Reproductibilité : elles sont reproductibles chez l'élève ;
- Persistance : elles ont un certaine persistance,
- Systémique : elles ne sont pas isolées, sont en relation avec d'autres.

Ainsi nous ne nous intéresserons pas aux erreurs qui sont dues à une absence de connaissance évidente (erreur de manipulation lors de l'utilisation d'un nouvel appareil), à un dysfonctionnement d'une tâche routinière (erreur de calcul erratique) ou à l'esprit fatigué selon l'expression de Bachelard.

Examinons le statut et le rôle de l'erreur du point de vue de l'enseignant dans les processus d'enseignement et d'apprentissage. Cette place et ce rôle sont tributaires des conceptions mêmes que l'enseignant a vis à vis de ces processus.

Plaçons-nous dans une conception dite transmissive de l'enseignement-apprentissage, c'est à dire, une conception selon laquelle l'élève ne sait rien alors que le maître sait et selon laquelle le rôle de l'enseignant consiste à déverser le savoir dans la « tête vide » de l'élève. L'erreur est de la responsabilité de l'élève : c'est qu'il n'a pas appris, qu'il n'a pas écouté en classe. Elle doit être évitée à tout prix et est synonyme de faute. Ainsi pour y remédier, l'élève doit travailler davantage, voire sous la contrainte de la coercition.

Plaçons-nous dans une conception dite behavioriste, c'est à dire selon laquelle on ne peut avoir accès aux structures mentales du sujet mais pour laquelle on peut faire acquérir au sujet un savoir en lui aménageant un certain nombre d'étapes bien choisies et graduées. De façon imagée, on peut parler de la conception des petites marches. L'erreur n'est pas prévue ni envisagée. Si, par malheur, elle apparaît, elle est du ressort de l'enseignant. Ce dernier a proposé aux élèves une tâche trop complexe, il aurait dû la découper en plusieurs sous-tâches. Le traitement de l'erreur se situe en amont du côté du professeur.

Enfin, dans des conceptions constructiviste ou socio-constructiviste du développement cognitif, l'erreur a une place centrale puisqu'elle exprime un état du savoir du sujet, un niveau de conceptualisation, de développement cognitif. Dans ce cadre, on ne peut dissocier l'erreur du processus de l'apprentissage. Une des tâches de l'enseignant est de :

- procéder à l'identification des erreurs produites par l 'apprenant en lien avec la situation dans laquelle elles se manifestent,
- procéder à leur analyse,
- tenter de les comprendre,
- mettre en œuvre des situations didactiques visant à les traiter sur la base de RE-MEDIATION.

2H2. A propos de la notion d'obstacle.

Un des premiers à placer la notion d'obstacle dans la compréhension de la construction des connaissances est Gaston Bachelard **[II.2-19]** :

« *L'idée de partir de zéro pour fonder et accroître son bien ne peut venir que dans des cultures de simple juxtaposition où un fait connu est immédiatement une richesse. Mais devant le mystère du réel, l'âme ne peut se faire, par décret, ingénue. Il est alors impossible* *de faire d'un seul coup table rase des connaissances usuelles. Face au réel, ce qu'on croit savoir clairement offusque ce qu'on devrait savoir. Quand il se présente à la culture scientifique, l'esprit n'est jamais jeune. Il est même très vieux, car il a l'âge de ses préjugés. Accéder à la science, c'est, spirituellement, rajeunir, c'est accepter une mutation brusque qui doit contredire un passé.* »

En poursuivant dans cette voie, Guy Brousseau **[II.2-20]** précise :

« *L'erreur n'est jamais le fait de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise*. »

Ainsi, comme nous l'avons déjà dit, l'erreur est la manifestation de conceptions du savoir, de règles d'actions erronées intégrées dans un ensemble cohérent, pour le sujet, de représentations du réel. Seul la modification ou le franchissement de ces conceptions seront synonymes de progrès.

De façon courante, en didactique des mathématiques, la notion d'obstacle est définie ainsi :

- c'est une connaissance (et non une absence de connaissance),
- celle-ci permet de produire des réponses adaptées à certains problèmes ou classe de problèmes,
- elle conduit à des réponses erronées dans d'autres types de problèmes,
- elle présente une résistance forte à toute modification ou transformation et se manifeste de manière récurrente,
- le rejet de cette connaissance aboutit à une connaissance nouvelle.

Donnons immédiatement un exemple de ce type d'obstacle. Il est courant que des élèves, à la fin de l'école primaire ou au début du collège écrivent : 5,7 + 2,8 = 7,15 au lieu de 8,5 !

Analysons une démarche probablement employée par l'élève. Grâce à d'autres erreurs analogues, nous pouvons supposer que l'élève considère un nombre décimal comme un couple de deux entiers et qu'il additionne ces deux nombres en séparant partie entière et partie décimale. Ainsi, il effectue (5 ; 7) + (2 ; 8) = (7 ; 15), ce qui correspond bien à une addition[3], non pas dans les décimaux, mais dans les couples (x ; y) de nombres.

Examinons, point par point, les différentes caractéristiques de la définition précédente de l'obstacle. Cette procédure permet de produire des réponses exactes pour calculer par exemple 5,2 + 7,7 ou 4,12 + 12,58 mais évidemment conduit à des réponses fausses dès qu'il y a une retenue à effectuer entre partie décimale et partie entière.

Effectivement, l'expérience des enseignants montre que cette erreur est très difficile à combattre et qu'elle se manifeste chaque année avec de nouveaux élèves. Enfin, pour rejeter cette connaissance, l'élève devra abandonner l'idée qu'un décimal est un couple d'entiers indépendants et construire le nombre décimal comme une entité mathématique

[3] Cette addition de couples sera même l'objet d'enseignement en licence de mathématiques à l'université.

dont une représentation dans le système à base 10 usant de la virgule s'écrit à l'aide de deux nombres entiers séparés par une virgule. Mais on pourrait tout autant utiliser la représentation fractionnaire.

2H3 Différents types d'obstacles

Obstacle d'origine épistémologique

C'est ce type d'obstacle qui a été mis en évidence par G. Bachelard. L'obstacle épistémologique est inhérent au savoir lui-même, il est impossible de l'éviter même par ingénierie didactique bien appropriée. On a connaissance d'un tel obstacle très souvent en examinant l'histoire et l'épistémologie des mathématiques, son dépassement étant source d'un grand progrès. On peut faire l'hypothèse que la plupart du temps, les obstacles épistémologiques rencontrés au cours de l'histoire sont autant d'obstacles épistémologiques pour les élèves, eux-mêmes.

Donnons maintenant quelques exemples :

- **Obstacles à la notion de nombre**

Jusqu'au XVII^{e} siècle (époque récente au vu de l'histoire des mathématiques), les mathématiciens séparaient les nombres positifs des nombres négatifs, les nombres non fractionnaires des fractions.

Descartes nommaient les solutions négatives d'une équation les « fausses » solutions, Euler citait des propriétés une fois pour les nombres et une autre fois pour les fractions.

- **Obstacles à la notion de fonction**

Cette notion n'a été définie qu'au XX^{ème} siècle dans sa généralité et a provoqué de nombreuses difficultés : Euler n'imaginait pas qu'une fonction numérique puisse être définie par plusieurs formules sur des intervalles disjoints, la fonction devait être définie par une seule formule.

- **Obstacles à la notion d'infini**

Un des premiers problèmes lié à l'infini est le paradoxe d'Achille et la tortue énoncé par Zénon d'Elée[4] : *Achille et une tortue font une course. Achille nettement plus rapide laisse partir la tortue en avance. Au bout d'un certain temps, Achille aura comblé son retard et atteint le point de départ de la tortue ; mais pendant ce temps, la tortue aura parcouru une certaine distance, certes beaucoup plus courte, mais non nulle. Cela demandera alors à Achille un temps supplémentaire pour parcourir cette distance, pendant lequel la tortue avancera encore plus loin ; et puis une autre durée avant d'atteindre ce troisième point, alors que la tortue aura encore progressé. Ainsi, toutes les fois qu'Achille atteint l'endroit où la tortue se trouvait, elle se retrouve encore plus loin. Par conséquent, le rapide Achille n'a jamais pu et ne pourra jamais rattraper la tortue.*

Il a fallu attendre D'Alembert (1717 – 1783), puis Cauchy (1789 – 1857) pour résoudre ce paradoxe lié à la notion d'infini. L'obstacle provient du fait que l'on pense qu'une somme infinie de termes positifs est infinie, or ceci est faux. Effectivement, on peut découper le temps de course en une infinité de moments, mais cette somme infinie de durées n'est pas infinie mais est égale au temps que mettra Achille pour rattraper la tortue.

---

[4] Philosophe grec (≈ 490 av JC ; ≈ 430 av JC)

Obstacle d'origine didactique

A la différence de l'obstacle épistémologique, l'obstacle didactique n'est pas inhérent au savoir mais découle de l'acte d'enseignement. Nous verrons, à l'aide du paragraphe suivant sur la transposition didactique que ces obstacles sont inévitables mais on peut cependant en limiter les effets. En effet, toute présentation du savoir construit des représentations plus ou moins exactes du savoir chez l'élève mais la connaissance des obstacles didactiques permet à l'enseignant de retravailler puis de modifier ces représentations.

Donnons maintenant quelques exemples d'obstacles didactiques.

- **Obstacles à la notion de nombre décimal**

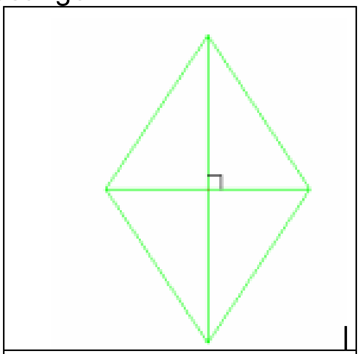
Comme nous l'avons vu précédemment, des élèves envisagent le nombre décimal comme un couple de deux entiers indépendants. Cette conception est confortée par la présentation des nombres décimaux à partir de mesures de grandeurs avec unités et sous unités. Si l'on reprend l'exemple de l'erreur : 5,7 + 2,8 = 7,15 au lieu de 8,5, on peut la traduire comme la somme de 5 m et 7 dm et de 2 m et 8 dm. Ainsi le résultat 7 m et 15 dm est exact.

- **Obstacles à la notion de fraction**

On présente très couramment à l'école primaire une fraction comme une part de gâteau. Or cette présentation rend difficile la perception d'une fraction supérieure à 1 : *« on ne peut pas prendre 5 bouts d'un gâteau s'il est coupé en quatre »* répond un élève de la classe de cinquième à qui on demande d'expliquer ce qu'est $\frac{5}{4}$.

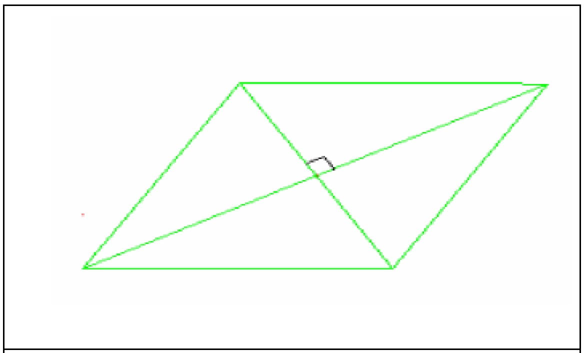
- **Obstacles à la notion de losange**

Si on examine la présentation courante du losange dans les manuels scolaires, on le rencontre très fréquemment avec les diagonales parallèles aux bord de la feuille, comme le losange 1



Losange 1

et non comme



Losange 2

Ainsi, dans le cas du losange 2, beaucoup d'élèves ne le reconnaissent pas comme un losange, surtout si les diagonales ne sont pas tracées. Ils le désignent uniquement comme un parallélogramme, ce qui n'est pas faux mais gomme la particularité de cette figure géométrique.

Nous pourrions citer encore beaucoup d'autres exemples d'obstacles d'origine didactique.

Obstacle d'origine ontogénique.

Ce sont des obstacles qui sont liés au développement cognitif de l'individu. Piaget a mis en évidence quatre stades de développement (stade sensori-moteur, période pré opératoire, période des opérations formelles et période de l'intelligence formelle). Ainsi, d'après Piaget un enfant ne peut accéder à une certaine forme d'abstraction qu'à partir de la période des opérations formelles, or en mathématique l'abstraction est vite indispensable pour son apprentissage.

Quelques exemples d'obstacles ontogéniques :

- si on propose à un enfant de comparer la quantité d'objet dans les deux listes suivantes

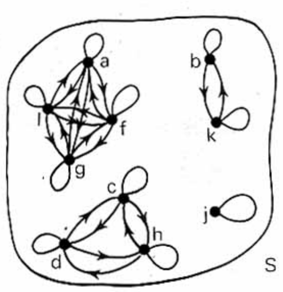
(1) ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

(2) □□□□□□□□□□

il va répondre que la liste (1) contient plus d'objets que la liste (2). Il ne fait pas la distinction entre le cardinal d'un ensemble et la place occupée par l'ensemble.

- de même un enfant associe la notion de quantité de liquide dans un récipient à la hauteur de liquide dans le récipient. Ainsi, si on met de l'eau dans un verre à base large et que l'on verse devant l'enfant l'eau dans un verre à base fine, il affirmera qu'il y a plus d'eau dans le deuxième verre.
- à l'époque de l'enseignement des mathématiques modernes dans le système éducatif français, on enseignait à des élèves de la classe $5^{ème}$, la notion de relation d'équivalence. Voici un extrait d'un manuel de mathématiques de cette classe, manuel qui était une référence de l'époque :

6.2. relations d'équivalence



Dans l'ensemble des exemples, les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses?

- *Chaque fois que le classement dépend du choix initial alors la relation ne possède pas les trois propriétés.*
- *Chaque fois que le classement ne dépend pas du choix initial alors la relation possède les trois propriétés.*

1. Voyez ci-contre un diagramme sagittal de la relation définie dans S (il s'agit de l'ensemble S de l'exemple 1) à l'aide du lien verbal «**être superposable à**». Vous pouvez constater que cette relation possède les trois propriétés suivantes :

- *tout élément est relié à lui-même*;
- *chaque fois qu'un élément x est relié à un élément y alors y est relié à x*; par suite *il n'y a pas «d'aller simple»* d'un élément à un autre;
- *chaque fois qu'un élément x est relié à un élément y et que cet élément y est relié à un élément z alors x est relié à z* ou *chaque fois que deux chemins se suivent il existe un raccourci (penser à la fin du 4.3.2).*

2. Construisez un diagramme sagittal de la relation définie
— dans D (exemple 2) à l'aide de «être parallèle à»,
— dans D (exemple 3) à l'aide de «être sécante à»,
— dans Δ (exemple 4) à l'aide de «être perpendiculaire à»,
— dans Δ' (exemple 4 bis) à l'aide de «être perpendiculaire à»,
— dans E (exemple 5) à l'aide de «avoir même chiffre des dizaines que».

Parmi ces cinq relations quelles sont celles qui possèdent les trois propriétés précédentes?
Chaque fois qu'une relation possède les trois propriétés, le classement correspondant dépend-il ou non du choix initial?

3. Vous verrez plus tard que *chaque fois qu'une relation définie dans un ensemble possède les trois propriétés ci-dessus alors le classement correspondant est indépendant du choix initial.*

De telles relations sont appelés des **relations d'équivalence**.

MAUGUIN A, (1978), *Mathématiques classe de 5^e,* Paris, ed Istra

Cela se passe de commentaires, un grand nombre d'élèves de la classe de cinquième ont dû connaître des difficultés générées par des obstacles d'origine ontogénique pour donner du sens à cette définition.

Obstacle d'origine affective

Ce type d'obstacle est nettement moins étudié en didactique des mathématiques car son analyse et son traitement ne relèvent pas directement de la didactique des mathématiques, celle-ci ne fournissant pas un cadre théorique suffisant à son étude qui repose sur des concepts de la psychologie et de la psychanalyse. Les travaux de Jacques Nimier ou de Claudine Blanchard-Laville fournissent des éléments fort pertinents pour étudier ce type d'obstacles.

Donnons néanmoins quelques exemples :

- **Obstacles à la notion de zéro**

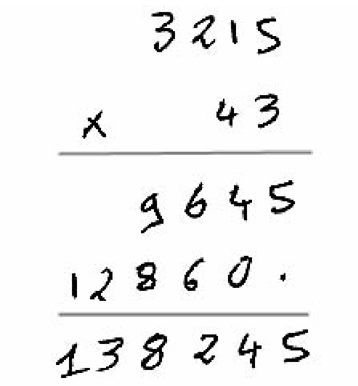
La peur du zéro a pu être identifiée comme obstacle à la conceptualisation du nombre 0. Un élève n'acceptait pas le nombre zéro car il avait peur du néant, du vide.

- **Obstacles systématiques à toutes notions de mathématiques**

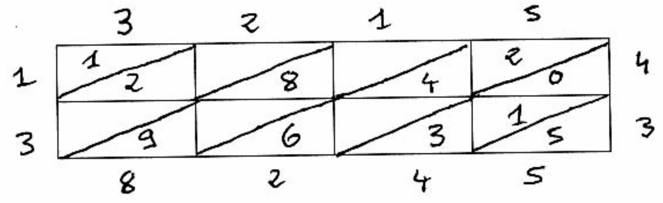
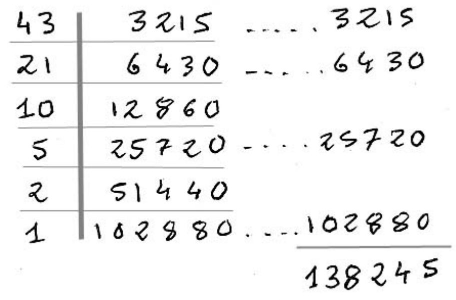
Certains élèves se mettent en position de blocage dès que l'enseignant prononce certains mots : il suffit que l'enseignant prononce le mot *vecteur* pour qu'un élève se dise « je vais rien comprendre, je vais avoir zéro au prochain devoir ». Ce ressenti peut être dû à une remarque désobligeante inconsciente ou non de la part de l'enseignant lors de l'apprentissage premier de la notion.

2I Transposition didactique.

Comme nous avons tenté de le faire jusqu'alors, nous commençons par un exemple. Tout le monde connaît l'algorithme suivant de la multiplication de deux entiers :



C'est celui que l'on apprend à l'école primaire. Voyons deux autres algorithmes déroulés sur le même exemple :

<table>
<tr><th>Algorithme dit à la grecque</th><th>Algorithme dit à la russe</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Cet exemple nous montre que des choix sont effectués dans ce qui est enseigné. Pourquoi n'enseigne-t-on qu'un seul algorithme de la multiplication ? pourquoi celui-là ? peut-on en changer ? quelle conséquence sur l'enseignement ?

L'objectif de la théorie de la **transposition didactique** est de tenter de répondre à ces questions, en apportant un cadre théorique pour aborder ce problème. C'est un concept développé par Yves Chevallard dans son livre **[II.2-7]** « La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné ».

La transposition didactique est l'étude des transformations que subit un savoir aux fins d'être enseigné. Il est clair que le savoir savant, c'est-à-dire le savoir élaboré par les chercheurs, n'est pas le savoir enseigné à l'école, au collège ou au lycée. Ce dernier a subi un certain nombre de transformations indispensables.

La théorie a repéré plusieurs stades de savoirs :

- le savoir savant
- le savoir à enseigner
- le savoir scolaire
- le savoir enseigné
- le savoir de l'élève.

2I1. Le savoir savant

C'est le savoir élaboré par les chercheurs, mais déjà à cette étape ce savoir subit des transformations. Le chercheur résout des problèmes pour lesquels a priori il n'a pas toutes les connaissances nécessaires. Il va donc en construire afin de résoudre son problème, mais avant de rendre public ces nouvelles connaissances il va d'abord les dépersonnaliser. Il va passer sous silence ses errances, ses impasses et même dans certains cas le problème initial qui a été à l'origine de ses recherches. Ensuite il décontextualise le savoir, il va essayer de le généraliser, de montrer que celui-ci est un outil pour une classe de problèmes. Quand un grand nombre de résultats ont été ainsi obtenus, les mathématiciens les publient dans un livre, on parle alors de livre du savoir. Dans ce livre, le savoir est complètement dépersonnalisé et décontextualisé. Il suffit de lire par exemple les éléments de Bourbaki pour se convaincre de ce phénomène. En général, ce type de livres n'est qu'utile qu'aux chercheurs du même domaine, car eux, peuvent recontextualiser le savoir et y redonner du sens.

2I2. Le savoir à enseigner

En France, les objets à enseigner sont déterminés par des personnes très diverses. Cela peut aller du chercheur renommé (très souvent les « prix Nobel » s'autorisent à décrire ce qu'il faudrait enseigner), d'hommes politiques, d'associations de spécialistes comme APMEP, UPS, SMF, ou des Instituts comme les IREM,**[II.2-8]**

Cette **noosphère**, comme la désigne Yves Chevallard, va désigner les objets à enseigner. Ceux-ci dépendent donc de la société, de son mode de fonctionnement, de son degré de technologie, de la formation de ses enseignants, etc.. Il faut bien remarquer que les objets à enseigner ne sont pas toujours stables au cours du temps. Par exemple, la géométrie descriptive a complètement disparu des programmes, tout comme des techniques très particulières comme l'extraction de la racine carrée. En revanche, de nouveaux savoirs apparaissent : la théorie des graphes fait son apparition dans les programmes de terminale ES en spécialité, l'étude de quelques surfaces de l'espace en classe de terminale S.

Une fois les objets à enseigner repérés, l'institution scolaire les met en textes, c'est ce qu'on appelle les programmes. Ces derniers sont en général écrits par une commission d'experts (comprenant en général des enseignants-chercheurs de l'Université, des inspecteurs généraux ou pédagogiques, des enseignants de « terrain »). Dans ces programmes, il est indiqué quels sont les savoirs, les techniques à enseigner. On y trouve très souvent des remarques concernant la mise en œuvre des savoirs, leur degré de complexité souhaité. Il arrive parfois que les auteurs des programmes redéfinissent des objets mathématiques, réécrivent des propriétés mathématiques.

L'exemple le plus frappant à ce propos est la définition de la droite euclidienne donnée en classe de quatrième dans les programmes de 1971 :

« *Une droite euclidienne D est un ensemble E muni d'une famille F de bijections de E sur* $\mathbb{R}$*, telle que : - pour tout élément f de F et pour toute constante réelle a, les applications définies par g(M) = f(M) + a et g'(M) = – f(M) + a appartiennent aussi à F ;*

- réciproquement si f_1 *et* f_2 *sont deux éléments quelconques de F, alors l'une des deux éventualités suivantes est réalisée :*

ou bien il existe un réel α *tel que* $f_2(M) = f_1(M) + \alpha$ *;*

ou bien il existe un réel β *tel que* $f_2(M) = - f_1(M) + \beta$.

L'ensemble E est appelé le support de la droite euclidienne D, un élément M de E est appelé un point de la droite euclidienne D. »

Cet exemple montre le cas où un objet mathématique (la droite euclidienne) a dû être redéfini dans les programmes scolaires. Cette définition n'est pas celle que l'on rencontre dans le savoir savant, il a fallu l'adapter pour la « rendre compréhensible » au niveau souhaité.

2I3 Le savoir scolaire

On désigne par « savoir scolaire » le savoir mathématique présent dans les livres à destination des élèves, c'est-à-dire le plus fréquemment dans les manuels scolaires. Les auteurs doivent décliner le programme d'une classe en différents chapitres, décider l'ordre d'exposition des notions. Pour un chapitre donné, les auteurs doivent choisir les activités de présentation ou de découverte, la présentation du cours (quels savoirs vont être institutionnalisés ?), les exercices qui vont permettre à l'élève de s'approprier le savoir.

Par exemple, la notion de proportionnalité est au programme de mathématiques de la classe de Sixième. Ce dernier ne précise pas les savoirs à institutionnaliser mais seulement quelques compétences comme traiter les problèmes de proportionnalité, en utilisant des raisonnements appropriés (passage par l'image de l'unité ; utilisation d'un rapport de linéarité ; utilisation du coefficient de proportionnalité) ou reconnaître les situations qui relèvent de la proportionnalité et celles qui n'en relèvent pas. Examinons deux extraits de manuels institutionnalisant la proportionnalité.

Extrait de *Math 6*e Collection Domino Nathan 2005

1 La proportionnalité

- On dit que **des grandeurs sont proportionnelles** si on peut passer de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre.
- **Un tableau de proportionnalité** est un tableau dans lequel on peut passer de la première ligne à la deuxième en multipliant toujours par le même nombre **(le coefficient)**.

Extrait de *Maths 6*e Magnard 2005

1 Situations de proportionnalité

Dans certaines situations, les raisonnements « *alors 3 fois plus* », ou « *alors 4 fois plus* » sont justifiés pour calculer.
Ce sont des situations de proportionnalité.

En examinant ces deux extraits, il est manifeste que le savoir « la proportionnalité » n'apparaît pas sous la même forme. Dans le premier cas, on définit des grandeurs proportionnelles, alors que dans le deuxième cas, on donne des indices (l'expression « alors *x* fois plus ») pour déterminer si une situation est de proportionnalité ou non. On peut ainsi remarquer que dans ce dernier cas, l'objet mathématique « la proportionnalité » n'est pas défini de manière canonique.

2I4. Le savoir enseigné.

C'est à cette étape de la transposition didactique qu'intervient le professeur. En effet, à l'aide des programmes, des manuels scolaires et des ses propres connaissances, il va construire son enseignement. Il va choisir l'ordre dans lequel il va présenter les notions du programme, les activités qu'il va travailler avec les élèves, les savoirs qu'il va institutionnaliser. Notons que dans cette étape, l'épistémologie de l'enseignant est primordiale. En effet, ses représentations sur la mission de l'enseignant, sur l'apprentissage en général, sur l'apprentissage des mathématiques, sur la discipline mathématique sont des facteurs, plus ou moins inconscients, de choix de transposition.

Par exemple, pour l'enseignement de l'addition à l'école primaire, plusieurs positons de l'enseignant sont possibles. Un enseignant porté sur l'enseignement de techniques, privilégiera l'automatisation d'algorithmes de calcul de l'addition avec retenue. Il proposera aux élèves un grand nombre d'exercices afin d'obtenir de la part de ceux-ci une bonne maîtrise de la technique. En revanche, un autre portera plus ses efforts sur le sens de l'opération, il proposera alors un grand nombre de situations variées liées ou non à l'addition.

De même, certains enseignants choisissent d'être rigoureux dans l'exposition des savoirs. Ils préfèrent donner une définition précise et exacte des savoirs quitte à ce que celle-ci soit difficile à appréhender par les élèves.

Donnons l'exemple de la « définition » de la notion de fonction en classe de seconde. Un enseignant très rigoureux, porté sur la structure axiomatique des mathématiques peut énoncer ceci :

« Une fonction d'un ensemble E vers un ensemble F est une relation binaire de E vers F telle que tout élément de E soit en relation avec au plus un élément de F. Quand les ensembles E et F sont l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, on dit que la fonction est une fonction numérique à variable réelle. »

En revanche, un enseignant, moins rigoureux, pourra fournir la « définition » suivante plus abordable pour un élève de seconde :

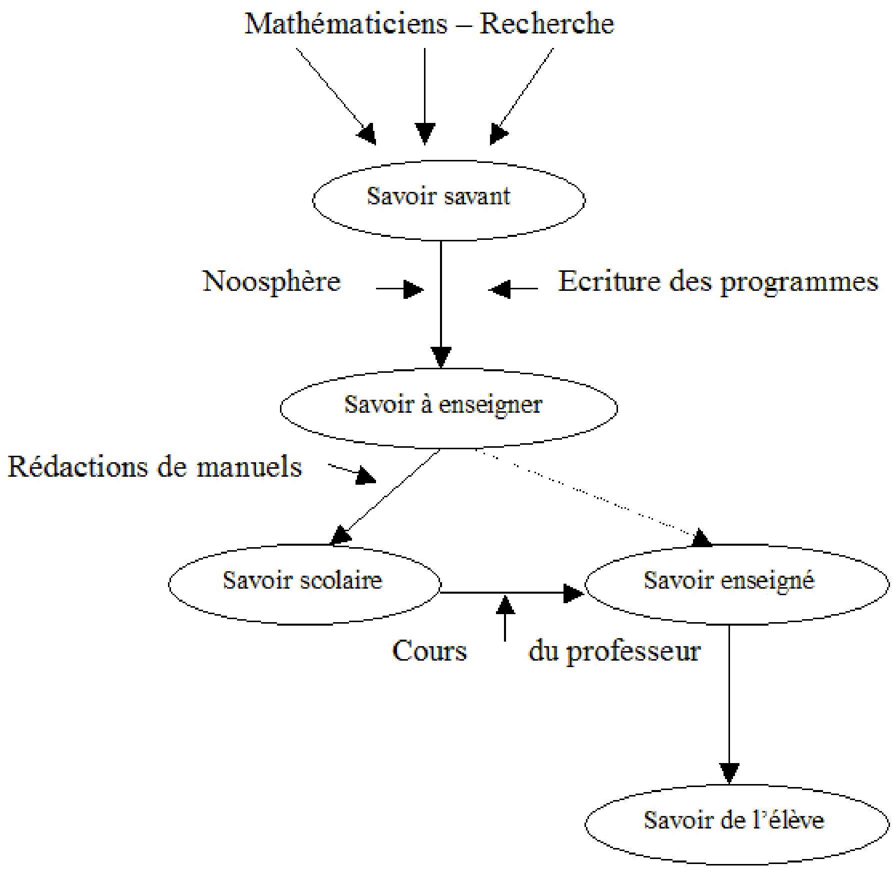
« Définir une fonction f c'est associer à tout nombre réel x au plus un nombre réel nombre réel noté $f(x)$. »

Cet exemple illustre bien les choix qui se présentent aux enseignants et ceux-ci les effectuent de manière consciente ou inconsciente en fonction de leur épistémologie.

2I5. Le savoir de l'élève

Le dernier maillon de la chaîne de la transposition didactique est le savoir de l'élève. Il est clair que le savoir intégré par l'élève n'est pas la copie conforme du savoir enseigné par le professeur. Inconsciemment, l'élève va procéder à des choix, donner un sens particulier à certaines notions, retenir certaines techniques au détriment d'autres. Nous reviendrons par la suite sur le savoir de l'élève dans le chapitre sur la Théorie des champs conceptuels.

Nous pouvons résumer le processus de transposition didactique par le schéma suivant :



2I6. Le temps d'enseignement et le temps d'apprentissage

La théorie de la transposition didactique amène à considérer deux types de temps : le temps de l'enseignement et le temps d'apprentissage.

Le temps d'enseignement correspond au temps que nécessite la présentation d'un savoir. En effet, la mise en texte du savoir à enseigner impose une linéarité du temps d'enseignement. Il est nécessaire de présenter les notions dans un certain ordre chronologique. De plus le savoir enseigné s'appuie sur la dialectique ancien/nouveau : tout chapitre nouvellement enseigné apporte son lot de nouveautés (savoirs ou méthodes) à la différence du savoir savant qui s'appuie sur la dialectique problème/résolution. Comme nous l'avons vu au premier chapitre, le savoir savant se construit principalement à la suite de résolution de problèmes, un chercheur n'a pas comme idée première de créer du savoir mais plutôt de résoudre les problèmes qu'il s'est posés. D'autre part, l'ordre des savoirs enseignés peut être très différent de l'ordre historique par exemple : dans le système scolaire français, les nombres décimaux sont présentés bien avant les nombres irrationnels (du type $\sqrt{2}$) alors que ces derniers étaient déjà « entrevus » par les mathématiciens grecs et que les nombres décimaux n'ont été dégagés que bien plus tard lorsque le système décimal fut adopté.

Le temps d'apprentissage correspond au temps nécessaire à l'appropriation d'un savoir par un sujet. Nous savons bien qu'il n'est pas cumulatif, continu. L'apprentissage nécessite souvent des allers-retours, des nouvelles remises en questions. Il est difficile d'affirmer que le temps d'apprentissage d'une notion est terminé, souvent une nouvelle situation mettant en jeu cette notion permettra un apprentissage plus approfondi ou dans une direction différente.

Il est à noter que ce temps est propre à chaque individu alors que le temps d'enseignement est identique pour tous les élèves d'une même classe.

Le système d'enseignement a tendance à nier cette différence entre ces deux temps, à vouloir les identifier, à faire comme si un élève s'appropriait le savoir dans un temps bien connu à l'avance (connu de l'enseignant). On interprète alors cette différence, si elle est importante, en termes de retard scolaire, voire d'échec scolaire. Combien d'élèves ne seraient pas en échec si on leur laissait le temps d'apprendre !

2I7. Différents types de savoirs

En élaborant la théorie de la transposition didactique, Yves Chevallard a été amené à distinguer différents types de savoirs :

- les savoirs mathématiques
- les savoirs paramathématiques (notions outils)
- les savoirs protomathématiques (métaconnaissances)

Les savoirs **mathématiques** correspondent aux savoirs mathématiques habituels. Ce sont les concepts définis dans le cours (comme médiatrice, carré, multiplication, …).Pour ceux-ci, le maître attend des élèves qu'ils sachent :

- en donner une définition ;
- en donner les principales propriétés ;
- reconnaître un certain nombre de problèmes liés à ces concepts.

Les savoirs **paramathématiques** sont des savoirs auxiliaires mais indispensables pour faire des mathématiques. Nous pouvons citer comme savoir protomathématique : démonstration, équation, logique des propositions. En effet, ces savoirs doivent être connus des élèves mais ne sont pas enseignés comme des savoirs proprement dits, mais ils peuvent l'être à un niveau plus élevé. Par exemple, à l'université, on définit, dans un cours sur la logique, toutes les connaissances liées au statut des propositions, des prédicats, etc..

Enfin, les savoirs **protomathématiques** sont des savoirs plus diffus, mais tout autant nécessaires pour faire des mathématiques. Ils ne peuvent être enseignés tels quels et ne s'acquièrent très souvent que par la pratique. Nous pouvons citer : reconnaître l'emploi d'une technique, traduire en langage mathématique un énoncé, etc.

Par exemple, pour factoriser au collège l'expression $(x-1)^2-4$, il est nécessaire de reconnaître que l'on peut utiliser l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ en prenant $a=x-1$ et $b=2$. Il est clair sur cet exemple que le savoir mathématique (l'identité remarquable) est insuffisante pour réaliser cette tâche de factorisation.

Pour aller plus loin…

[II.2-1] Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage

[II.2-2] Brousseau, G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, (7.2) Grenoble : La Pensée Sauvage

[II.2-3] Perrin-Glorian, M-J, (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu *Recherches en didactique des mathématiques*, (19.3) Grenoble : La Pensée sauvage

[II.2-4] Arsac, G, Germain, G, Mante, M, (1988), *Problème ouvert et situation problème*, Villeurbanne : IREM de Lyon

[II.2-5] Bach, MJ, *& al*, (1992), Enseigner par les activités, *Repères* n°8, ed Topiques

[II.2-6] Douady, R, (1989), Hypothèses pour la construction de séquences d'apprentissage, *Suivi scientifique de la classe de sixième*, Inter-IREM

[II.2-7] Chevallard, Y., (1991), *La transposition didactique*, Grenoble : La Pensée sauvage

[II.2-8] Nous rappelons que :

APMEP est l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. Créée en 1909, elle regroupe des enseignants de mathématiques de l'école maternelle à l'Université. Elle est une association indépendante. Elle organise chaque année un congrès qui réunit presque un millier de participants intéressés par l'enseignement des mathématiques.

UPS est l'Union des Professeurs de Spéciales, c'est-à-dire des enseignants en classes préparatoires aux grandes écoles.

SMF est la Société Mathématique de France qui regroupe des chercheurs en mathématiques.

IREM sont les Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. C'est une structure universitaire où travaillent ensemble des enseignants de mathématiques de tout niveau.

[II.2-9] Références concernant l'apprentissage des mathématiques fondé sur le tâtonnement expérimental de l'apprenant en école primaire: travaux de Paul Le Bohec, Bernard Monthubert, Maurice Berthelot, etc.,
Site Archives de l'ICEM http://www.icem-freinet.info/

[II.2-10] Lemery, E., (1983) Pour une mathématique populaire. Libres recherches d'adolescents au collège. Paris : Casterman E3

[II.2-11] Régnier, JC, (1988) Étude didactique d'une méthode d'apprentissage fondé sur le tâtonnement expérimental de l'apprenant, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* séminaire de Didactique des Mathématiques de Strasbourg, pp 255-279

[II.2-12] Régnier, JC, (1994) Tâtonnement expérimental et Apprentissage en mathématiques*,* in P. Clanché, E., Debarbieux (Eds) *La pédagogie Freinet, mises à jour et perspectives*, P.U.Bordeaux, 1994, pp 135-153

[II.2-13] Régnier, JC, (1998) Méthode naturelle et tâtonnement expérimental, in N. Bizieau, J-F. Fouquer (Eds) *Célestin Freinet, l'ICEM, un choix pédagogique, un engagement social et politique*, Nantes : ICEM-Pédagogie Freinet, 1998, pp 312-325.

[II.2-14] Régnier, JC, (2000) *Auto-évaluation et autocorrection dans l'enseignement des mathématiques et de la statistique. Entre praxéologie et épistémologie scolaire.* Note de synthèse HDR Université Marc Bloch Strasbourg
http://demeter.univ-lyon2.fr:8080/sdx/theses/lyon2/2000/regnier_jc

[II.2-15] Vergnaud G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *R. D.M.* 10/2-3, p. 133-170.

[II.2-16] Freinet, C., (1971) *Essai de psychologie sensible : acquisition des techniques de vie constructives*, Paris : Delachaux et Niestlé éditeurs,
[II.2-17] Vygotski, L.S., (1985) *Langage et Pensée,* Paris : Messidor, Terrains/Éditions Sociales,. (Traduction intégrale des textes russes de Vygotski par Françoise Sève, suivi d'un commentaire sur les remarques critiques de Vygotski par Jean Piaget)
[II.2-18] Freinet, C., (1966) *Le tâtonnement expérimental* Éditions de l'École Moderne, (1), réédité dans *BTR* (18-19),
[II.2-19] Bachelard G, (1934) *La formation scientifique*, Paris, Librairie Philosophique J Vrin
[II.2-20] Brousseau, G, (1983) *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, Recherches en didactique des mathématiques, n°4.3, Grenoble, ed La Pensée sauvage
[II.2-21] Bruston, M, Rouxel, Cb (1983), *Obstacles et déblocages en mathématiques*, Publication de l'APMEP n°47 Paris : A.P.M.E.P.
[II.2-22].**Artigue, M**. (1990) Ingénierie didactique *R. D.M*. 9/3, ed La Pensée sauvage (p. 281-307)