Didactique des mathématiques et de la statistique

Cours de Jean-Claude Régnier

2 Les mathématiques ont une histoire

Il nous est apparu important de revenir sur la dimension historique des mathématiques. En effet les modalités de rencontre avec les mathématiques dans leur approche scolaire les présentent la plupart du temps comme un édifice achevé, pérenne, jamais soumis aux aléas de la découverte ni porteuses d'erreur en leur sein. Elles ne sont pas présentées comme le produit d'un travail humain de découverte, d'invention ou de créativité. Elles n'apparaissent pas comme le produit d'une activité humaine qui a débuté, sans doute à l'aube de l'humanité et surtout qui se poursuit inlassablement.

2A. Prise en compte du développement historique des mathématiques

Dans les années 1970, un courant est apparu dans la communauté des enseignants de mathématiques considérant comme important d'introduire dans l'enseignement des mathématiques, une perspective historique. Cette idée était en lien avec l'épistémologie des mathématiques : les connaissances des mathématiques naissent de la résolution de problèmes. Nous reviendrons plus précisément sur ce point plus loin. On a pu alors penser que la connaissance des problèmes qui se sont historiquement posés et dont la résolution avait conduit au développement des mathématiques, pouvait donner du sens à la fois à l'enseignement même des mathématiques et faciliter la compréhension des concepts abordés.

Dans son ouvrage de Géodésie publié en 1840 que nous avons déjà évoqué, Vincent Croizet **[I.2-8]** commence par un *coup-d'œil rapide sur l'histoire des mathématiques*. Il écrit que « les Mathématiques, dont le nom veut *Science* ou *Instruction*, ont pour objet de comparer les grandeurs. Elles se divisent naturellement en *Mathématiques pures* et *Mathématiques mixtes.* Les Mathématiques pures considèrent les propriétés de la quantité d'une manière abstraite, et capable d'augmentation ou de diminution. Les Mathématiques mixtes, qu'on nomme plus ordinairement *Sciences Physico-Mathématiques,* sont des parties de la Physique susceptibles, par leur nature, d'une application spéciale des Mathématiques pures. Telles sont la Mécanique, science de l'équilibre et du mouvement des corps solides ; l'Optique ou la théorie du mouvement de la lumière ; l'Astronomie, science du mouvement des corps célestes ; l'Acoustique ou la théorie du son, etc.. Les Mathématiques pures, les seules dont je me propose de parler, renferment l'Arithmétique, la Géométrie et l'Algèbre. » Il dit alors s'appuyer sur l'ouvrage *Histoire des mathématiques* **[I.2-1]** de Jean-Etienne Montucla (1725-1799) dont la première édition avait été réalisée en 1758. Le sous-titre présente une histoire « *dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours ; où l'on expose le tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties de mathématiques, les contestations qui se sont élevées entre les mathématiciens et les principaux traits de la vie des plus célèbres*. »

L'apport de l'étude de l'histoire des mathématiques montre, selon Jean Dieudonné **[I.2-4]**, que, la plupart du temps, une théorie commence par la confrontation à un problème très particulier. Par exemple, citons le cas du problème de la duplication du cube dans les mathématiques grecques. À partir de l'analyse des résultats de cette confrontation, Jean Dieudonné était parvenu à une catégorisation de ces situations problèmes en six classes.

Les efforts pour résoudre le problème posé peuvent rester vain. Ce problème constitue un représentant d'une première classe : celle des problèmes morts-nés. Par exemple : la détermination des nombres premiers de Fermat ou l'irrationalité de la constante d'Euler.

Les efforts pour résoudre le problème peuvent être fructueux mais cette résolution n'apporte pas de progrès pour résoudre d'autres problèmes. Cela constitue la seconde classe des problèmes sans postérité.

Mais une situation plus favorable peut surgir à la suite d'un approfondissement des techniques mises en œuvre pour résoudre le problème initial. Ces techniques enrichies peuvent être mises à profit pour affronter des problèmes similaires voire plus difficiles. Cependant il se peut que les mathématiciens restent avec le sentiment de ne pas vraiment comprendre la raison de ces succès. Il y a là une troisième classe, celle des problèmes qui engendrent une *méthode.*

Parfois, au bout d'un temps assez long, il se peut que l'étude du problème conduise à des résultats insoupçonnés, révélant l'existence de structures sous-jacentes qui éclairent la question posée, et mieux encore, fournissent des outils généraux et puissants qui vont donner la possibilité d'élucider quantité d'autres problèmes dans divers domaines. Cette quatrième classe est alors formée des problèmes qui s'ordonnent autour d'une *théorie* générale, féconde et vivante.

Toutefois Jean Dieudonné rappelle ce que soulignait David Hilbert qu'une théorie ne prospère que par l'apport ininterrompu de problèmes nouveaux. Ayant résolu les problèmes les plus importants par leurs conséquences et leurs liens avec d'autres branches des mathématiques, la théorie a tendance à se centrer sur des questions de plus en plus spéciales et isolées qui peuvent même être très difficiles. Il s'agit alors d'une cinquième classe de problèmes sur laquelle les théories qui s'y alimentent vont, plus ou moins passagèrement, se trouver en voie d'*étiolement*.

Enfin il se peut que, partant d'une théorie fondée sur un choix heureux d'axiomes motivé par des problèmes précis et ayant développé des techniques d'une grande efficacité dans de nombreuses parties des mathématiques, on se mette à chercher, sans motif apparent, à modifier assez arbitrairement la base des axiomes. Pour Jean Dieudonné, l'espoir du renouvellement des succès de la théorie initiale est la plupart du temps trompeur. S'appuyant sur une suggestion de Polya et Szegö, il détermine une sixième classe qui conduit aux théories en voie de *délayage*.

En ce qui concerne le groupe Bourbaki auquel il a appartenu, et dont les travaux de ce groupe ont participé à la construction de l'histoire des mathématiques, Jean Dieudonné considère ici que les sujets traités dans le séminaire Bourbaki relèvent plutôt de la quatrième catégorie et dans une moindre mesure de la troisième.

Notre but ici n'est pas d'exposer une histoire des mathématiques. Il est avant tout celui de faire comprendre que les mathématiques ont une histoire au cours de laquelle des points de vue se sont affrontés et des erreurs ont été perpétrées au sein des théories mathématiques en vigueur à l'époque. Évidemment, comme le précise Gaston Bachelard dans ses propos sur l'épistémologie des sciences, ces erreurs apparaissent après-coup.

La plupart des personnes non spécialistes de mathématiques n'imagine pas que les mathématiciens dans leur contribution au développement ont commis des erreurs. Lorsqu'elles pensent *erreurs*, celles-ci ne l'associent qu'aux erreurs que l'élève commet lors de ses études à l'école, au collège ou au lycée. Pour illustrer comment les évolutions et les erreurs font partie de la construction des mathématiques au cours de leur histoire, nous rapportons les propos de Laurent Schwartz **[I.2-11]** (p.160-161) quand il parle de sa rencontre avec Bourbaki et des satisfactions intellectuelles qui en ont découlé. « *Bourbaki fut pour moi une révélation* » écrit-il. Le mode de pensée que développe Bourbaki à partir de la méthode axiomatique, conduit à une pratique de recherche qui le satisfait tout à fait. « *J'ai pris l'habitude de déterminer dès le début de chaque recherche la structure dans laquelle j'évoluais. (…). Chaque structure est entièrement caractérisée par ses axiomes. Cela permet une classification des divers objets mathématiques les uns par rapport aux autres. (…) on se débarrasse de contraintes stupides qui existaient auparavant.* » et il poursuit « *Le langage devient (…) extrêmement épuré. Les romans, que rappelaient les livres de la Collection Borel, disparurent. Les modèles de rédaction ont varié à travers les siècles et ont subi diverses transformations. C'est d'abord, en Grèce, le mathématicien (ou groupe de mathématiciens) Euclide qui réorganisa complètement la géométrie grâce, déjà, à une théorie plus ou moins axiomatique et une rédaction extrêmement précise. Les articles des Grecs sont écrits avec une précision infiniment plus élevée que ceux de la Collection Borel ou de Lebesgue ou ceux du XVII^e ou XVIII^e siècles.* » Il y a donc lieu de percevoir que l'expression du discours est variable au cours du temps. En ce qui concerne les erreurs véhiculées par ce discours, Laurent Schwartz parle des mathématiques du début du XIX^e siècle qui ont perdu toute rigueur. « *On manipulait des séries sans trop savoir si elles étaient convergentes ou divergentes (…) et s'il y avait convergence, on ne précisait pas si elle était uniforme.* » Il poursuit en relatant comment, en 1821, Cauchy, dans son cours à l'École polytechnique « démontre » que la somme d'une série simplement convergente de fonctions continues est continue. En 1826, Abel publie un contre-exemple où la somme n'est pas une fonction continue, ce qui invalide la proposition de Cauchy. Pourtant, comme le note Laurent Schwartz, Cauchy dont l'exigence de rigueur ne peut être mise en doute, répète l'erreur en 1833 ! Parlant de Lagrange, Laurent Schwartz rappelle que ce célèbre mathématicien écrivit un traité sur les « dérivées, sans les infiniment petits » dans lequel il s'est incroyablement trompé. Son approche pour obtenir la dérivée est localement valide si la fonction est un polynôme ou encore une fonction analytique, objet encore inconnu à son époque. Sinon elle est fausse.

Nombre d'élèves n'arrivent pas à bien gérer le lien entre la comparaison de deux nombres quelconques et celle de leur carré. Ou encore sur la compatibilité entre la relation d'ordre et la multiplication. Ainsi trouve-t-on une erreur courante avec cette proposition : si $a<b$ alors $a^2<b^2$. Elle est vraie si a et b sont deux nombres positifs mais elle est fausse si les deux sont négatifs. Quand l'un est négatif et l'autre, positif, on ne peut conclure globalement. Prenons un exemple :

Signe de a	Signe de b	a	b	a<b	a^2	b^2	$a^2<b^2$
+	+	4	6	Vrai	16	36	Vrai
-	-	-5	-1	Vrai	25	1	Faux
-	+	-2	8	Vrai	4	64	Vrai
+	-	-3	2	Vrai	9	4	Faux

Dans un article consacré aux nombres relatifs **[I.2-12],** Georges Glaeser rappelle combien en 1803, un grand mathématicien comme Lazare Carnot (1753-1823), membre de l'Académie des Sciences exprimait ses difficultés à l'égard de la compréhension de cette propriété en écrivant « *-3 serait plus petit que 2, cependant que $(-3)^2$ serait plus que 2^2, c'est à dire qu'entre deux quantités inégales le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se faire de la quantité.* »

Dans les diverses enquêtes que Jean-Claude Régnier a faites au cours des 15 dernières années dans nos cours de didactique des mathématiques auprès des étudiants de licence, incontestablement le hit-parade est d'une grande stabilité. A la demande : *citer quelques mathématiciens en précisant leur contribution et leur époque*, Pythagore et Thalès se disputent la tête du classement. De manière massive, les noms de mathématiciens viennent surtout en association avec un théorème : théorème de Pythagore, théorème de Thalès. En règle générale, pour ces étudiants la contribution du mathématicien se restreint à ce théorème. Quant à l'époque, elle demeure très imprécise. Cette absence de repère historique est aussi la marque de l'orientation pédagogique dominante adoptée pour l'enseignement des mathématiques. Par manque de formation et par une certaine conviction qu'il y aura là un temps précieux perdu en s'engageant dans une perspective historique pour aborder les concepts, les méthodes et les techniques mathématiques, il semble se perpétuer une ignorance de l'histoire des mathématiques qui paraît laisser penser que les mathématiques n'ont pas d'histoire.

Pour revenir au théorème de Thalès, on a pu trouver dans les manuels scolaires, l'énoncé du type suivant :

« Soient A et B deux points distincts et M un point quelconque d'une droite D. Les points A', B' et M' étant les images des points A, B, M par projection non constante p de la droite D sur la droite D', le point M' a même abscisse dans le repère (A' ; B') que M dans le repère (A ; B). »

Nous sommes tenté de dire mais où est Thalès dans tout cela ? A quoi peut servir ce théorème ? A quel problème répond-il ?

En retournant aux sources, nous apprenons par Diogène Laërce (III^{e} après JC) que « Hiéronyme dit que Thalès mesura les pyramides d'après leur ombre ayant observé le temps où notre propre ombre est égale à notre hauteur ». Alors pour Michel Serres **[I.2-13]** « La géométrie est une ruse, elle fait un détour, elle prend la route indirecte pour accéder à ce qui dépasse la pratique immédiate. La ruse, ici, c'est le modèle : construire en réduction, à module constant, un résumé, un squelette de la pyramide. De fait, Thalès n'a rien découvert d'autre que la possibilité de la réduction, que l'idée de module, que la notion de modèle. La pyramide est inaccessible, il invente l'échelle. »

Nombre sont ceux qui savent que le Prix Nobel vient récompenser les travaux scientifiques ou les contributions exemplaires dans divers domaines. Mais qu'en est-il des mathématiques ? La communauté des mathématiciens ne peut prétendre à cette haute récompense qu'est le Prix Nobel. La petite histoire parle d'un conflit entre Nobel et le mathématicien Mittag-Leffler qui a conduit à une sorte de mesure de rétorsion privant la discipline des mathématiques de cette récompense.

Toutefois une distinction a été créée en 1936 sur la base de fonds résultant d'un bilan positif du financement du Congrès de l'Union mathématique internationale, tenu à Toronto en 1924 et présidé par le Professeur canadien John Charles Fields (1863-1932). Il s'agit de la Médaille Fields qui est décernée tous les quatre ans à au moins deux jeunes mathématiciens brillants, âgés de moins de 40 ans, lors du congrès par un comité émanant de l'Union. Parmi la quarantaine de lauréats honorés depuis la création, nous pouvons citer les mathématiciens français ou issus des laboratoires français :

Année de la remise de la Médaille	*Lauréat*	*Né en…*
1950	Laurent Schwartz	1915
1954	Jean-Pierre Serre	1926
1958	René Thom	1923
1966	Alexandre Grothendieck	1928
1982	Alain Connes	1947
1994	Pierre-Louis Lions	1956
	Jean-Christophe Yoccoz	1957

2002	Laurent Lafforgue	1966
2006	Wendelin Werner	1968

Ces mathématiciens sont d'éminents contributeurs au développement contemporain des mathématiques.

2B. Apport pour l'enseignant

Il y a tout à penser que la formation en histoire des mathématiques ou même des disciplines scientifiques pourrait bénéficier à l'enseignant dans sa pratique pédagogique pour enseigner les mathématiques à l'école, au collège ou au lycée. A ce jour, des ressources accessibles à tous existent dans lesquelles l'enseignant peut puiser pour étayer la construction des séquences et des situations d'enseignement-apprentissage. La prise en compte d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques est une condition qui contribuera très certainement aux modifications des représentations sociales qui affectent les mathématiques dans notre culture.

Pour aller plus loin…

[I.2-1] Montucla JF, Lalande J. (1799-1802) *Histoire des Mathématiques*. Paris : H. Agasse, Libraire

[I.2-2] Dhombres J, & al (1987) *Mathématiques au fil des âges*. Paris : Gauthier-Villars

[I.2-3] Bouveresse, J, Itard, J. Sallé, E. (1977) *Histoire des mathématiques* Paris : Librairie Larousse

[I.2-4] Dieudonné J, (1977) *Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique*. Paris : Gauthier-Villars

I.2-5] Youschkevith, A. & al, (1981) *Fragments d'histoire des mathématiques*. Brochure n°41. Paris : APMEP

[I.2-6] Collette. JP (1973) *Histoire des mathématiques*. Tome 1 (De la préhistoire à l'aube des mathématiques modernes XVI^{ème} siècle) Montréal : ERPI.

[I.2-7] Collette. JP (1979) *Histoire des mathématiques*. Tome 2 (Du XVII^{ème} à l'aube des mathématiques du XX^{ème} siècle) Montréal : ERPI.

[I.2-8] Croizet, V., (1840) *Géodésie générale et méthodique des géodésies considérée sous le rapport de la mesure et de la division des terres*. Paris : Pélissonnier, libraire

[I.2-9] Dedron, P., Itard, J. (1959) *Mathématiques et Mathématiciens*. Paris : Editions Magnard

[I.2-10] Ifrah G. (1981) *Histoire universelle des chiffres. Lorsque les nombres racontent les hommes*. Paris : Seghers

[I.2-11] Schwartz, L. (1997) *Un mathématicien aux prises avec le siècle*. Paris : O. Jacob

[I.2-12] Glaeser, G. (1981) Épistémologie des nombres relatifs. *RDM* Vol 2.3 Grenoble : La Pensée Sauvage

[I.2-13] Serres, M. (1972) Ce que Thalès a vu au pied des pyramides in *Hermès II : L'interférence*. Paris : Ed. de Minuit.