Didactique des mathématiques et de la statistique

Cours de Jean-Claude Régnier

1 Les mathématiques comme objets culturels

Dans notre société, il y a comme une certaine fascination pour l'étrangeté des mathématiques. Comme nous le verrons plus loin dans le rapport affectif aux mathématiques, nous rencontrons presque toujours des individus qui disent ne pas les aimer ou que les mathématiques ne les aiment pas ou bien qui affirment leur passion, mais rarement les mathématiques laissent indifférentes. Pour les élèves comme pour beaucoup de parents, les mathématiques ne sont qu'une réalité scolaire. À entendre les propos qui circulent ça et là, ils semblent exprimer les symptômes d'une culture qui n'aimerait pas les mathématiques, qui ne les comprend pas et même qui ne saurait les faire apprécier. A quel paradoxe sommes-nous confrontés quand nous savons que les pratiques sociales mettant en jeu des mathématiques sont toujours plus nombreuses ?.

1A Que sont les mathématiques ?

A prime abord la question : *que sont les mathématiques ?* peut surprendre par une présupposée évidence de la réponse. Cependant cette réponse est loin d'être simple et rapide. D'ailleurs il en est de toutes les disciplines scientifiques dont la délimitation des champs respectifs est souvent problématique. Si nous considérons la statistique, par exemple, en tant que science parente proche des mathématiques, nous dénombrons plus d'une centaine de définitions qui vont des plus sérieuses et épistémologiquement fondées aux plus farfelues.

Le Dictionnaire de l'Académie Française dans sa 5ème édition de 1822 donne la définition suivante :

MATHÉMATIQUE :	*Science qui a pour objet la grandeur en général, c'est à dire tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution, et qui en considère les propriétés.* (…) Il est plus usité au pluriel. Le peuple dit quelquefois et le peuple seul dit, La Mathématique (…)

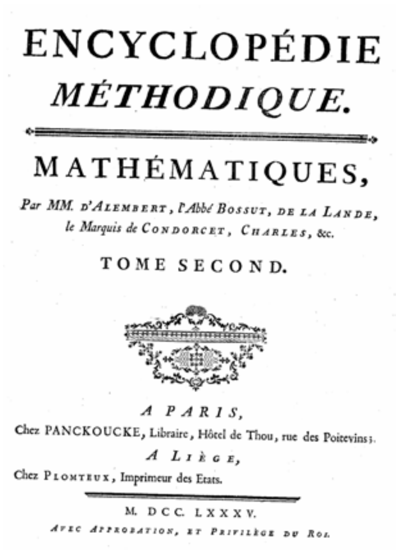
Dans la célèbre *Encyclopédie méthodique* de Diderot et D'Alembert de 1785, nous pouvons trouver l'article suivant :

(Source : Archives privées Jean-Claude Régnier)

MATHÉMATIQUE *ou* MATHÉMATIQUES, f. f. (*ordre encyclop. entend. raiſon, philoſophie ou ſcience, ſcience de la nature, Mathématiques*) c'eſt la ſcience qui a pour objet les propriétés de la grandeur entant qu'elle eſt calculable ou meſurable. *Voyez* GRANDEUR, CALCUL, MESURE, &c.

Mathématiques au pluriel eſt beaucoup plus uſité aujourd'hui que *Mathématique* au ſingulier. On ne dit guère la *Mathématique*, mais les *Mathématiques*.

La plus commune opinion dérive le mot *Mathématique* d'un mot grec, qui signifie *science* ; parce qu'en effet on peut regarder, selon eux, les *Mathématiques*, comme étant la science par


ENCYCLOPÉDIE
MÉTHODIQUE.
MATHÉMATIQUES,
Par MM. D'ALEMBERT, l'Abbé BOSSUT, DE LA LANDE, le Marquis de CONDORCET, CHARLES, &c.
TOME SECOND.
A PARIS,
Chez PANCKOUCKE, Libraire, Hôtel de Thou, rue des Poitevins;
A LIÈGE,
Chez PLOMTEUX, Imprimeur des Etats.
M. DCC. LXXXV.
AVEC APPROBATION, ET PRIVILÈGE DU ROI.

excellence, puisqu'elles renferment les seules connaissances certaines accordées à *nos lumières naturelles* ; nous disons à nos lumières naturelles, pour ne point comprendre ici les vérités de foi, & les dogmes théologiques.

D'autres donnent au mot *Mathématique* une autre origine, sur laquelle nous n'insisterons pas, & qu'on peut voir dans l'*histoire des mathématiques* de M. Montucla, *pag 2&3.* Au fond, il importe peu quelle origine on donne à ce mot, pourvu que l'on se fasse une idée juste de ce que c'est les *Mathématiques*. Or cette idée est comprise dans la définition que nous en avons donnée ; & cette définition va être encore mieux éclaircie.

Les *Mathématiques* se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle *Mathématiques pures*, considère les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second cas, elle est représentée, par l'étendue ; dans le premier cas les *Mathématiques pures* s'appellent *Arithmétique* ; dans le second, *Géométrie*. (…)

La seconde classe s'appelle *Mathématiques mixtes* ; elle a pour objet les propriétés *de la grandeur concrète*, entant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est à dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers. (…)

Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation. (…)

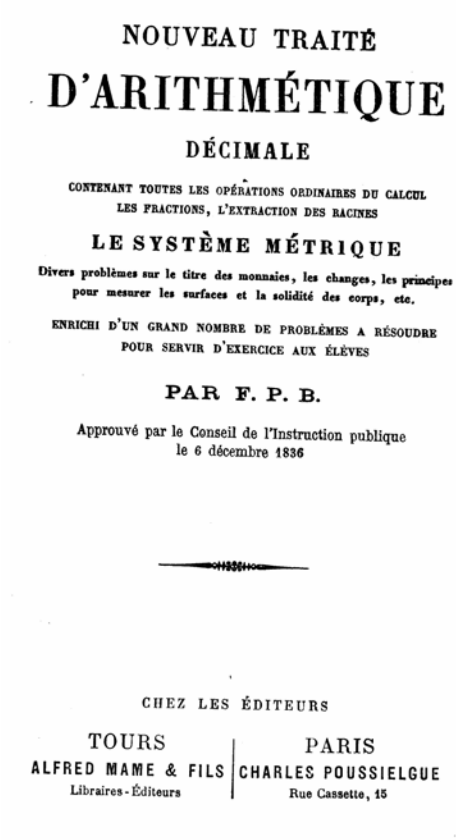
Quant à l'utilité des *Mathématiques*, *voyez* les différens articles déjà cités ; & sur-tout *les articles* GÉOMÉTRIE & GÉOMÈTRE.

Nous dirons seulement ici, que si plusieurs écrivains ont voulu contester aux *Mathématiques* leur utilité réelle, si bien prouvée par la préface de l'histoire de l'Académie des Sciences, il y en a eu d'autres qui ont cherché dans ces sciences des objets d'utilités frivoles ou ridicules. On peut en voir un léger détail dans l'histoire des Mathématiques de M. Montucla (…) Cela me rappelle le trait d'un chirurgien, qui, voulant prouver la nécessité que les chirurgiens ont d'être lettrés, prétend qu'un chirurgien qui n'a pas fait sa rhétorique, n'est pas en état de persuader à un malade de se faire saigner lorsqu'il en a besoin. (…)

Différentes branches des *Mathématiques* se divisent encore en spéculatives & pratiques.(…) »

Louis-Marie Morfaux dans son *Vocabulaire de la philosophie et des sciences humaines* de 1980 définit ainsi la mathématique ou les mathématiques de la façon suivante : « ensemble des sciences déductives ayant pour objet le nombre, l'espace, l'ordre ». Il distingue parmi cet ensemble : les *mathématiques pures* ou *abstraites* (arithmétique, algèbre, calcul des fonctions, calcul infinitésimal), les *mathématiques concrètes* (géométrie, topologie) et les *mathématiques appliquées* (trigonométrie, géométrie descriptive, calcul des probabilités.). Il rappelle que le pluriel indique la diversité de fait des disciplines de cet ordre tandis que le singulier renvoie à l'idéal des mathématiciens de les unifier en une seule théorie.

Pour entrer dans une des disciplines des mathématiques pures, nous donnons un exemple concernant l'Arithmétique à partir d'un traité du XIXème siècle.



NOUVEAU TRAITÉ

D'ARITHMÉTIQUE

DÉCIMALE

CONTENANT TOUTES LES OPÉRATIONS ORDINAIRES DU CALCUL
LES FRACTIONS, L'EXTRACTION DES RACINES

LE SYSTÈME MÉTRIQUE

Divers problèmes sur le titre des monnaies, les changes, les principes pour mesurer les surfaces et la solidité des corps, etc.

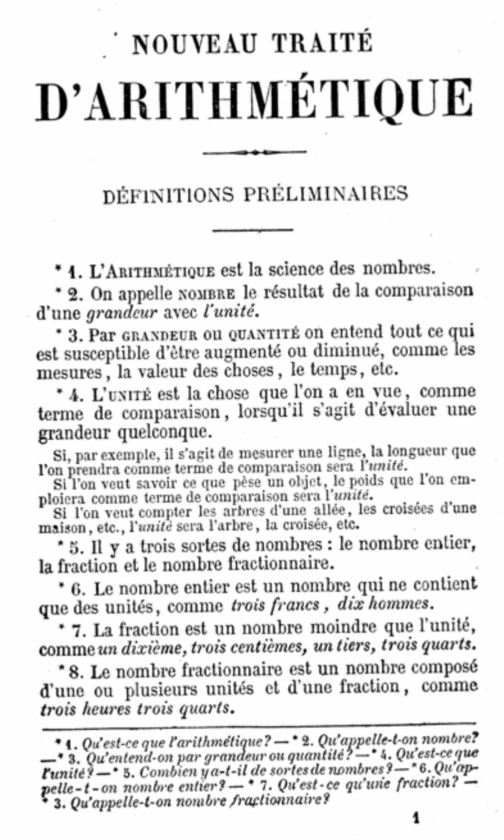
ENRICHI D'UN GRAND NOMBRE DE PROBLÈMES A RÉSOUDRE POUR SERVIR D'EXERCICE AUX ÉLÈVES

PAR F. P. B.

Approuvé par le Conseil de l'Instruction publique
le 6 décembre 1836

CHEZ LES ÉDITEURS

TOURS	PARIS
ALFRED MAME & FILS	CHARLES POUSSIELGUE
Libraires-Éditeurs	Rue Cassette, 15



NOUVEAU TRAITÉ

D'ARITHMÉTIQUE

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

* 1. L'ARITHMÉTIQUE est la science des nombres.

* 2. On appelle NOMBRE le résultat de la comparaison d'une *grandeur* avec *l'unité*.

* 3. Par GRANDEUR ou QUANTITÉ on entend tout ce qui est susceptible d'être augmenté ou diminué, comme les mesures, la valeur des choses, le temps, etc.

* 4. L'UNITÉ est la chose que l'on a en vue, comme terme de comparaison, lorsqu'il s'agit d'évaluer une grandeur quelconque.

Si, par exemple, il s'agit de mesurer une ligne, la longueur que l'on prendra comme terme de comparaison sera l'*unité*.

Si l'on veut savoir ce que pèse un objet, le poids que l'on emploiera comme terme de comparaison sera l'*unité*.

Si l'on veut compter les arbres d'une allée, les croisées d'une maison, etc., l'*unité* sera l'arbre, la croisée, etc.

* 5. Il y a trois sortes de nombres : le nombre entier, la fraction et le nombre fractionnaire.

* 6. Le nombre entier est un nombre qui ne contient que des unités, comme *trois francs*, *dix hommes*.

* 7. La fraction est un nombre moindre que l'unité, comme *un dixième, trois centièmes, un tiers, trois quarts.*

* 8. Le nombre fractionnaire est un nombre composé d'une ou plusieurs unités et d'une fraction, comme *trois heures trois quarts.*

* 1. *Qu'est-ce que l'arithmétique?* — * 2. *Qu'appelle-t-on nombre?* — * 3. *Qu'entend-on par grandeur ou quantité?* — * 4. *Qu'est-ce que l'unité?* — * 5. *Combien y a-t-il de sortes de nombres?* — * 6. *Qu'appelle-t-on nombre entier?* — * 7. *Qu'est-ce qu'une fraction?* — * 3. *Qu'appelle-t-on nombre fractionnaire?*

1

(Source : Archives privées Jean-Claude Régnier)

Nous voyons que définir les mathématiques n'est pas chose simple et que des références aussi fondamentales que celles d'un Diderot ou d'un D'Alembert ne fournissent pas une caractérisation précise de leur objet. Jean Dhombres **[I.1-10] (p 3)**, en tant que spécialiste de l'histoire des mathématiques, aborde l'objet et l'utilité de celles-ci à partir de textes classiques. Ainsi pointe-t-il :

Thème du texte	*Auteurs*	*Dates des textes de référence*
valeur intellectuelle des mathématiques	Platon	
utilité de mathématiques	Plutarque	
	Pan Lei	1690
mathématisation du monde physique	Galilée	1604, 1623, 1638
recherche de la vérité	Descartes	1637
	Pascal	1657
mathématiques et les lumières	D'Alembert	1746, 1751
	Condillac	1798
question des progrès des mathématiques	Fourier	1822
	Galois	1831
architecture des mathématiques	Bourbaki	1948

Concomitamment au développement des connaissances mathématiques, les mathématiques assument aussi, dans les sociétés, un certain nombre de rôles parmi lesquels Jean Dhombres identifie un rôle éducatif, un rôle social, un rôle méthodologique et un rôle culturel.

Un rôle éducatif des mathématiques qui n'a fait que s'accroître au delà de la formation des géomètres ou des experts-comptables.

Un rôle social des mathématiques en ce qu'elles concernent tant les calculs calendériques, les calculs des conjonctions des planètes et des prévisions des éclipses, que ceux des impôts ou des taxes ou encore aujourd'hui des divers calculs statistiques ou économiques.

Un rôle méthodologique des mathématiques en ce qu'elles interviennent dans la modélisation des phénomènes étudiés dans de nombreuses sciences y compris, aujourd'hui, les sciences humaines et sociales.

Un rôle culturel des mathématiques en ce qu'elles sont incorporées au sein des grands systèmes de pensée visant la compréhension ou l'explication du monde.

Faute d'une définition des mathématiques précise donnant des contours et des objets bien identifiés, la compréhension des rôles qu'elles jouent dans notre vie quotidienne, dans le monde qui nous entoure, peut constituer une clé de lecture de ce que sont les mathématiques.

Selon le mathématicien René Thom, les mathématiques sont à considérer comme un langage théorique universel fondé sur des axiomes avec une logique propre et une cohérence interne. Elles constituent une science vivante et évolutive dont le développement provient autant de la confrontation à des problèmes internes qu'à des problèmes externes et de leur résolution. Dans un entretien avec Jacques Nimier **[I.1-1]**, René Thom va jusqu'à affirmer que dans les sciences, il ne peut y avoir une théorisation à validité réellement universelle fondée sur des concepts exprimés dans le langage ordinaire, si ces concepts ne sont pas exprimables MATHÉMATIQUEMENT en terme d'entités fondamentales. Pour René Thom, il n'y aurait de théorisation que mathématique !

Cette théorisation qui se réalise par la mathématisation conçoit les mathématiques comme se développant selon un processus qui part de l'expérience, s'en abstrait pour y revenir ensuite. Il s'agit là d'une conception platonicienne selon laquelle les objets mathématiques ont une réalité objective, une existence propre indépendante de la connaissance que nous en avons. L'activité du mathématicien consiste en une sorte d'activité de découverte.

Au XIX^{e} siècle apparaît une conception dite « formaliste » selon laquelle les objets mathématiques n'existent plus en dehors des théories qui les définissent. Les mathématiques ne consistent plus qu'en des formules, des assemblages de symboles, qui n'ont aucune signification en soi. Sur la base des règles de raisonnement identiques à celles de la conception platonicienne, les formules sont déduites d'autres formules. La vérité n'a plus qu'un statut formel. Le jeu sur le choix du système initial d'axiomes conduit à produire des théories *consistantes* où l'expérience sensible ne semble avoir aucune place. Il en est ainsi de l'origine des géométries non euclidiennes.

Au XX^{e} siècle est apparue une troisième conception dite « constructiviste » en particulier développée à partir de 1907 par le logicien et mathématicien Luitzen Brouwer (1881-1966). Dans cette conception, seuls les résultats obtenus par une « construction finie » constituent des objets mathématiques. Dit autrement, les résultats bien établis sont ceux qui sont « expérimentables », c'est à dire réalisables en supposant qu'aucune limitation purement matérielle ne vienne s'y opposer. Dans cette conception des mathématiques, le raisonnement réfute le recours au principe logique du tiers exclu. Toute démonstration d'existence repose sur un algorithme de construction de l'objet.

Reste une autre question qui touche celle de la définition des mathématiques. Il s'agit de la question portant sur la ligne de démarcation entre la logique et les mathématiques. Nous n'abordons pas celle-ci dans ce cours.

1B. Quelques caractéristiques des mathématiques

Nous pourrions caractériser les mathématiques par la généralité de leur objet, le lien avec leur histoire et le lien avec leur enseignement.

La généralité de leur objet : les mathématiques sont utilisées comme telles dans de nombreux et divers domaines.

Le lien avec leur histoire : les connaissances enseignées aujourd'hui comme concepts de base, sont déjà le fruit de très longues élaborations qui ont demandé, pour la plupart, plusieurs siècles. Mais chaque jour de nouvelles connaissances mathématiques sont produites par la communauté des mathématiciens. La masse de ces connaissances s'accroît même d'une manière vertigineuse d'année en année. Parmi ces nouvelles connaissances, se trouvent celles qui sont en meilleure adéquation avec le monde actuel.

Le lien avec leur enseignement : pour une part importante les mathématiques sont une mise en forme de raisonnements et de méthodes. Dans l'enseignement des mathématiques, beaucoup d'aspects sont mêlés : leur utilité dans la lecture du monde, leur rôle dans la sélection scolaire, le langage qu'elles constituent, leur place dans des concours comme les rallyes mathématiques, les olympiades des mathématiques ou le concours Kangourou.

L'analyse des besoins sociaux peut être conduite à partir d'une modélisation mathématique ou conduire à des problèmes dont la résolution est réalisée dans le cadre de théories mathématiques. Nous percevons alors l'importance de ne pas réduire l'enseignement des mathématiques à un enseignement de connaissances anciennes pour tenir compte des nouveaux liens qui sont apparus avec de nouveaux outils et instruments comme l'informatique par exemple.

La lecture du monde fondée sur les apports des théories statistiques qui s'appuient elles aussi sur des modèles mathématiques, requiert une formation citoyenne en mathématiques. Les mathématiques font partie des objets de notre culture moderne et des moyens doivent en faciliter l'accès. L'enseignement organisé au sein de l'école en constitue un médiateur pour faire apprendre.

Nous pouvons aussi identifier trois sortes de mathématiques :

Les mathématiques de tout le monde et celles du quotidien : ces mathématiques matérialisent l'expression quantitative des faits à côté de leur expression verbale qui demeure qualitative. Ce sont les mathématiques comme outil nécessaire pour vivre au quotidien.

Les mathématiques des usagers : ce sont les mathématiques utilisées par les ingénieurs, les physiciens, les sociologues, les économistes, ou les psychologues. Les mathématiques leur sont un outil de travail indispensable.

Les mathématiques des mathématiciens : nous pourrions désigner ces mathématiques par l'expression : *savoir savant*. Pour les mathématiciens, les mathématiques sont tout autant un but qu'un moyen. Les mathématiques sont l'objet de leurs recherches. Les entretiens conduits par Jaques Nimier **[I.1-1]** nous donnent à voir ce que sont les mathématiques pour cette communauté. Pour avoir une idée plus incarnée d'un mathématicien, homme en chair et en os impliqué dans la vie dans son époque, l'ouvrage biographique **[I.1-5]** de Laurent Schwartz, un des plus grands mathématiciens français du XX$^{\text{ème}}$, est une bonne ressource. Voilà comment Laurent Schwarz se présente en avant-propos « Je suis mathématicien. Les mathématiques ont rempli ma vie : une passion pour la recherche et l'enseignement, tour à tour comme professeur à l'université et à l'Ecole polytechnique. J'ai en même temps réfléchi au rôle des mathématiques, de la recherche et de l'enseignement, dans ma vie et celle des autres, aux processus mentaux de la recherche, et je me suis consacré pendant des décennies aux réformes bien nécessaires de l'Université et des grandes écoles. »

1C. Le langage mathématique

Dans un texte de mathématique sont utilisés deux codes : le langage naturel et le langage symbolique.

Le langage naturel écrit est le même que celui utilisé quotidiennement même si le lexique peut parfois être différent, mais en tel cas c'est plutôt typique de la science mathématique qu'au texte mathématique lui-même.

Le langage symbolique a non seulement son propre lexique mais aussi sa propre syntaxe. Les mots y sont formés par des combinaisons de lettres et de symboles. Les difficultés de tels mots dépendent à la fois de leur longueur mais aussi des conventions implicites qui y sont utilisées. Ce vocabulaire précis et concis présente une économie de communication tout à fait appréciable mais aussi apporte une facilité dans le traitement même de l'information. Toutefois la syntaxe de ce langage symbolique ne consiste pas en une traduction symbolique du langage naturel écrit. Le langage symbolique est un outil particulier de communication écrite. Bien qu'il soit indispensable mais il n'est pas suffisant pour le texte mathématique, d'où cette difficulté du glissement incessant d'un langage à un autre.

1C1 Exemples de textes mathématiques écrits :

Texte écrit uniquement en langage naturel
Dans un parallélogramme, si un angle est un droit, alors les trois autres angles sont aussi des angles droits et ce quadrilatère est un rectangle.

Textes écrits uniquement en langage symbolique			
$z = x(60-2x) = 60x - 2x^2 = (-2)(x^2 - 30x)$	$x + y + x = 2x + y = 60$	$0 \le x \le 30$	$\begin{cases}(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ \forall (a,b) \in \Re^2\end{cases}$

Ces textes présentent des expressions symboliques insérées dans des phrases en langage naturel
• *Calculer 10a^2, puis (10a)^2 et 100a^2, pour a = 6, puis a = 0,6* • *L'expression* $z = x(60-2x) = 60x - 2x^2 = (-2)(x^2 - 30x)$ *peut être vue comme le début d'une identité remarquable*

Ces deux codes, langage naturel et langage symbolique, ne sont pas seulement juxtaposés mais ils sont utilisés dans une véritable interaction. L'emploi de ces deux codes donne lieu à trois modalités du langage mathématique :

- des expressions symboliques ;
- des formulations relevant du langage naturel ;
- des formulations relevant d'un langage mathématique distinct du langage naturel par la présence d'éléments du langage symbolique, de termes lexicaux ayant un sens spécifique en mathématiques ou de tournures syntaxiques privilégiées.

Voici des exemples :

D'une manière générale, si deux ***ensembles*** *ne sont pas* ***disjoints****, le nombre d'****éléments*** *de leur réunion n'est pas égal à la somme des nombres* ***respectifs*** *d'éléments de ces ensembles*

Ce texte comporte des éléments lexicaux ayant un sens spécifique en mathématiques : *ensemble, disjoint, élément*. Le terme *respectif* n'est pas un terme mathématique, il possède ici son sens habituel ; son emploi est dû à des raisons de concision.

La relation est telle que de chaque point représentant un élément de E part une flèche et une seule et telle qu'en chaque point représentant un élément de [1, 4] *arrive une flèche et une seule*

Ce texte comporte des expressions symboliques E, [1, 4] (cet objet est nommé intervalle et désigne l'ensemble des nombres de 1 à 4), comme des éléments lexicaux ayant un sens spécifique en mathématique, et la construction "une et une seule" non utilisée couramment qui peut être considérée d'un point de vue transformationnel, comme le résultat de transformations de coordination et d'effacement à partir des deux phrases : "une flèche part" et "une seule flèche part".

Certaines particularités des textes mathématiques résident dans le choix préférentiel de constructions moins usitées en langage naturel courant comme l'emploi de formes passives, de nominalisations. La précision et la concision amènent à la formation de compléments de noms en cascade et de phrases composées de plusieurs subordonnées. Les termes scientifiques sont généralement monosémiques (un seul signe). Dans le langage mathématique, on note l'importance de la préposition *de*, des noms, des adjectifs et la relative absence de verbes. Cette imbrication des deux codes langage naturel et langage symbolique est l'une des originalités des textes mathématiques écrits.

1C2. Les divers modes d'insertion de l'écriture symbolique dans le langage naturel

Trois modes d'insertion coexistent : l'insertion sans déformation de la syntaxe du langage naturel, l'insertion avec déformation de la syntaxe du langage naturel et l'insertion avec déformation du langage symbolique.

Insertion sans déformation de la syntaxe du langage naturel

Ce mode correspond à l'emploi d'une expression du langage symbolique en syntagme nominal (syntagme : fusion ou réunion de deux ou plusieurs éléments en un seul complexe). L'expression du langage symbolique peut prendre deux formes : terme ou proposition.

L'expression du langage symbolique est un terme :

- soit employé seul. Exemple : *La division euclidienne de a par b.* Chacun des deux termes a et b est employé seul.

- soit employé en apposition d'un système nominal. Exemple : *Le sous-ensemble E de l'ensemble F*. Le terme *E* est en apposition au terme *sous-ensemble* et le terme *F* l'est au terme *ensemble*. Les termes sont insérés dans la phrase de la même manière que le sont des noms propres.

L'expression du langage symbolique insérée à la place d'un syntagme nominal est une proposition :

- soit employée seule. Exemples : *On suppose* $a> 2$. *On a :* $a>2$. $A \subset B$ *signifie que tout élément de A est élément de B*. Remarquons que les deux propositions $a>2$ sont employées en complément d'objet, alors que la proposition $A \subset B$ est employée en sujet,

- soit employée en apposition à un syntagme nominal qui précise sa nature ou sa place dans le raisonnement. Exemple : *ce sont les solutions de l'équation* $f(x) = g(x)$, la proposition $f(x) = g(x)$ est en apposition au terme *équation*.

Insertion avec déformation de la syntaxe du langage naturel

Prenons un exemple : *Le point* $A \in D$ *est différent de B.* Cette phrase se lit : *le point A qui appartient à D est différent de B* ou *le point A appartenant à D est différent de B*. $A \in D$ est une proposition enchâssée dans la phrase matrice : *le point A est différent de B*.

Insertion avec déformation de la syntaxe du langage symbolique

Les symboles remplacent un adjectif éventuellement suivi d'un complément. Exemples :

être supérieur ou égal à (≥), être égal à (=), être différent de (≠).

1C3. Les divers types d'énoncé du langage mathématique.

Les mathématiques *savantes* écrites sont exprimées à partir d'énoncés dont le statut peut varier d'une présentation à l'autre. Nous reprenons les termes en usage au XIX^{ème} dans l'ouvrage de Vincent Croizet **[I.1-6] :**

Définition	*Proposition par laquelle on attribue un nom à une chose, ou l'explication d'un terme inconnu et qui n'a besoin d'aucune **démonstration**.*
Proposition	*Exposé d'une chose ou d'un fait*
Axiome	*Vérité évidente par elle-même*
Théorème	*Proposition à démontrer. Il renferme deux parties : l'**hypothèse** et la conclusion qui en est la conséquence.*
Corollaire	*Conséquence d'une proposition démontrée.*
Lemme	*Proposition qui ne sert que de préparation à une autre.*
Scolie	*Remarque relative à une ou plusieurs propositions précédentes*
Hypothèse	*Supposition faite dans l'énoncé d'un **problème** ou pendant une **démonstration**.*

Problème	*Question à résoudre ou qui exige une solution*
Démonstration	*Preuve d'une proposition*

C'est ainsi que l'auteur rappelle le *raisonnement adopté* dans son ouvrage. Aujourd'hui, nous pourrions dire :

Proposition	Par référence à la logique *: Énoncé de jugement susceptible d'être vrai ou faux*
Axiome	Chez les Grecs *: proposition ou principe évident et non démontrable, concernant la notion de grandeur.* Actuellement *: notions de base arbitrairement posées comme telles et dont la fonction est de constituer une science cohérente.*
Postulat	Dans la géométrie euclidienne : *proposition ni évidente ni démontrable que le géomètre demande d'admettre pour qu'il puisse construire son système hypothético-déductif*. Actuellement *: synonyme d' Axiome*
Théorème	*Proposition démontrable dont on établit qu'elle résulte nécessairement d'autres propositions déjà démontrées ou de principes posés et qui généralement à son tour sert à démontrer d'autres propositions.* Le *théorème* est totalement lié à la notion de *démonstration.*
Conjecture	*Proposition présumée vraie mais non encore démontrée.*

Dans une *méthode axiomatique* d'explicitation des mathématiques, comme il en est de la perspective adoptée par le groupe Bourbaki **[I.1-7],** un objet n'est alors pas directement défini par lui-même, par son essence, mais par les axiomes qu'il doit vérifier.

Donnons deux exemples de présentation axiomatique qui fonde des domaines des mathématiques :

Les fondements axiomatiques de la géométrie euclidienne ont été formulés par les axiomes d'Euclide, puis aujourd'hui ils le sont par les axiomes de Hilbert. Ces 20 énoncés donne une description rigoureuse et complète des bases à partir desquelles est construite toute la géométrie euclidienne.

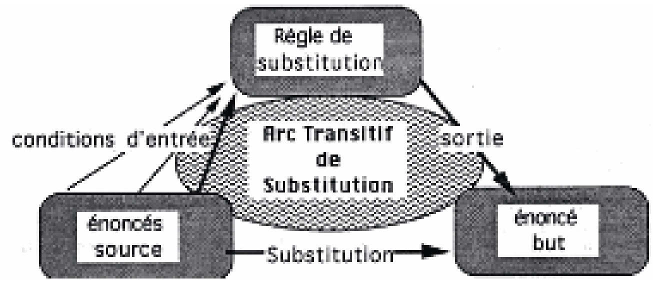
Les fondements axiomatiques de l'ensemble des nombres entiers naturels IN sont donnés par les axiomes de Peano. Cette arithmétique repose sur des notions primitives comme le 0 (zéro), entier naturel, et successeur, et sur les 5 axiomes suivants :

1. 0 est un nombre entier naturel ;
2. Tout nombre entier naturel a un successeur ;

3. Des nombres entiers naturels ayant même successeur sont égaux ;
4. 0 n'est le successeur d'aucun nombre entier naturel ;
5. Une partie P de IN contenant 0 et tel que le successeur de tout élément de P appartienne à P est égale à IN tout entier.

Un nombre entier est alors un objet qui respecte ces axiomes.

L'identification du statut des énoncés en mathématiques à partir de la catégorisation exposée ci-dessus, joue un rôle dans la compréhension même des mathématiques et dans leur apprentissage. Dans les travaux conduits par Raymond Duval **[I.1-8]** ou ceux de Damm **[I.1-9]** prennent en compte cette caractéristique pour penser l'enseignement des mathématiques. En particulier, dans le fonctionnement même de la démonstration considérée comme une argumentation fondée sur la *substitution* et non l'*accumulation*. Chaque démonstration peut être décomposée en une suite de pas, partant d'un ou plusieurs énoncés-source pour parvenir à un énoncé-but en utilisant une règle de transformation qui autorise cette substitution. Les deux énoncés sont d'égale valeur de vérité. Ils disent la même chose autrement.



1D. Finalités de l'enseignement des mathématiques de la scolarité obligatoire.

Force est de constater que la place des mathématiques dans des domaines variés et pour des rôles divers s'est accrue. Ainsi en est-il dans l'éducation tout comme dans la vie quotidienne mais aussi dans les relais que constituent les organes de diffusion de l'information ou encore dans les prises de décision politique et économique. De nombreuses questions surgissent telles que :

À quoi concourt l'enseignement des mathématiques ? D'une manière simplifiée nous pouvons dire que cet enseignement participe d'une formation générale, de la culture, d'une familiarisation avec une discipline de l'esprit (logique).

Dans quelle mesure la sélection par les mathématiques est-elle néfaste à l'enseignement même des mathématiques ?

Essayons de distinguer les principales finalités d'un enseignement de mathématiques. Ici, nous n'en retenons que trois que nous aborderons tour à tour : transmettre le patrimoine scientifique, former aux compétences mathématiques pour divers usages professionnels et aider à la conceptualisation du réel.

1D1. Transmettre le patrimoine scientifique

Transmettre le patrimoine scientifique proprement mathématique comme finalité d'enseignement se situe au lycée. Pourtant, pendant des siècles on a enseigné aux élèves de 13 à 16 ans le modèle euclidien de la géométrie, ou du moins certaines parties de ce modèle, comme aujourd'hui on enseigne certaines versions de la théorie des nombres, de la géométrie et de l'algèbre linéaire. La réforme dite des « mathématiques modernes » aboutit à enseigner à des élèves de sixième, et même aux jeunes enfants du cours élémentaire, des parties de la logique des classes et de leur symbolisme. Des transformations et déformations profondes du savoir mathématique, lors des choix des concepts mathématiques au moment des réformes, sont faites pour que ce savoir savant devienne le savoir à enseigner (programmes et instructions) puis le savoir effectivement enseigné (manuels, pratiques de classe). On aboutit à un savoir scolaire. Certaines d'entre elles aboutissent à détourner complètement de leur signification les concepts et procédures mathématiques qu'il s'agit de transmettre. Or, les raisons de ces déformations ne sont pas claires même si elles ne sont pas toutes mauvaises. Ce n'est pas seulement pour faire simple ou semblant d'être « savant » que ce processus de transformation a lieu mais pour que les élèves puissent apprendre. Cependant cette transmission du patrimoine scientifique commence tout de même pour une part à l'école élémentaire. Ce qui est enseigné actuellement à des élèves de 10 ans a été dans les siècles passés, l'objet des recherches d'une petite communauté de mathématiciens.

L'histoire des mathématiques nous permet de connaître que : l'écriture des égalités et des inégalités avec des symboles particuliers pour les relations (=, >, <) et pour les opérations (+, -, X,:,/,...), les tableaux de correspondance entre grandeurs proportionnelles, la représentation d'un nombre par un point sur une droite, ou la notation décimale sont autant d'inventions qui ont fait progresser les connaissances en mathématiques. Les propriétés des concepts qui sont enseignés aujourd'hui ont nécessité de nombreuses années pour être établies comme des vérités mathématiques. Par exemple, il en est ainsi de la nature du nombre réel irrationnel $\sqrt{2}$ ou celui du nombre π dont le caractère de nombre irrationnel n'a été établi qu'au XIX^{ème} siècle. Dit autrement ces deux nombres ne peuvent être écrits sous la forme du rapport de deux nombres entiers.

1D2. Former aux compétences mathématiques pour divers usages professionnels

L'enseignement des mathématiques est profondément marqué par l'idée que les mathématiques sont avant tout une discipline *scientifique,* et que l'objectif de former des mathématiciens ou des utilisateurs des mathématiques de haut niveau est primordial. La réforme des « mathématiques modernes » est un bel exemple : certains universitaires, mécontents des connaissances des étudiants qui entraient à l'Université, ont influencé cette réforme. La formation de mathématiciens et d'ingénieurs de haut niveau ne concerne qu'une minorité de la population des élèves du collège et du lycée. Même à l'Université, on enseigne *des* mathématiques à une diversité de populations d'étudiants : des physiciens, des chimistes, des économistes, des biologistes, des psychologues, des sociologues ou des littéraires.

Les textes de réflexion sur les mathématiques comme discipline de service renvoient aux spécialités scientifiques qui font usage des mathématiques (physique, biologie, sciences sociales et humaines) et nullement aux professions elles-mêmes. La réflexion des mathématiciens sur l'importance des savoirs et savoir-faire mathématiques chez les ouvriers, les employés, les agriculteurs, les commerçants est quasi inexistante.

Prenons un exemple : les calculs de mélanges que les éleveurs et les agriculteurs ont souvent besoin de faire notamment pour des mélanges d'engrais et des mélanges d'aliments. Un éleveur doit pouvoir comparer les valeurs alimentaires et les prix des mélanges d'aliments en vente dans le commerce, et déterminer le bénéfice possible en faisant les mélanges. Quelle proportion d'orge et de soja donne quelle proportion d'unités fourragères et de matières azotées, et à quel prix ? Les éleveurs qui n'entendent rien à l'algèbre linéaire, peuvent utiliser « la croix des mélanges » ou croire la publicité, ou faire comme le voisin.

Des recherches sont à mener quant à l'analyse de la part des mathématiques dans l'exercice d'une grande diversité de professions telles que celles d'ingénieur ou de technicien. Certaines professions ont besoin de mathématiques.

Mais, de quelles mathématiques ont-elles besoin ?

L'ergonomie cognitive qui est l'étude systématique des opérations de pensée nécessaires à l'accomplissement de telle ou telle activité ou à la résolution de tel ou tel problème, met en général en évidence les opérations de pensée qui présentent beaucoup d'aspects mathématiques et logiques. Elle permettrait d'aider à mieux déterminer les mathématiques utiles comme base d'une culture professionnelle, comme à apporter des solutions aux délicats problèmes d'éducation et de formation.

1D3. Aider à la conceptualisation du réel

Cette finalité a été abordée dans les recherches des psychologues surtout celles de Jean Piaget. Mais, elle est reprise et développée par la recherche en didactique des mathématiques qui prend en compte l'épistémologie spécifique des différents concepts mathématiques. Les recherches en didactique des mathématiques qui se focalisent sur cette finalité, considèrent les contenus de l'enseignement. Cette finalité transparaît surtout dans les débats sur les programmes et sur la formation des maîtres.

L'enfant développe spontanément certaines représentations du réel pour vivre dans son environnement. Il développe une représentation de l'espace comprenant des opérations analysables en termes mathématiques : calcul des relations spatiales en fonction des déplacements ou calcul de positions.

Le nombre naturel est lui-même appris largement en dehors de l'école. C'est un concept qui apparaît d'abord comme une réponse à des problèmes de comparaison (plus, moins, pareil) et à des problèmes d'addition et de soustraction. L'enfant apprend dans l'action, à travers des situations de prévision ou de production dans lesquelles ses procédures manifestent la prise en compte progressive de certaines propriétés. Gérard VERGNAUD **[I.1-2]** parle de théorèmes-en-acte **[I.1-3]** qui sont compris progressivement par l'enfant. Ces théorèmes ne sont le plus souvent qu'implicites. Il arrive toutefois que les enfants en expriment des aspects essentiels. Le domaine d'application de ces théorèmes-en-acte est très local, limité à des valeurs numériques simples, et à des domaines d'expérience familiers. Toutefois les enfants étendent spontanément, et dans certaines limites, le domaine de validité des opérations logiques ainsi découvertes. Nous pourrions donc considérer que l'enseignement des mathématiques doit créer les conditions favorables à l'émergence, à l'approfondissement, à l'extension et à l'explicitation progressive de tels théorèmes-en-acte qui sont des traces de la conceptualisation progressive dans un contexte socioculturel donné. Par exemple, la conceptualisation de l'aire et du volume relève de théorèmes –en-acte et elle n'est pas achevée à la fin du collège.

Si l'on considère dans l'enseignement cette idée que les mathématiques apportent une contribution importante à la conceptualisation du réel, nous sommes amenés à revoir profondément les *curricula* de mathématiques et la relation qu'ils entretiennent avec les autres *curricula*. En particulier, le recours à des situations et à des domaines autres que les mathématiques elles-mêmes, peut être un puissant facteur de renouvellement de l'enseignement. Cela ne signifie pas que doivent pour autant être reléguées au second plan les conceptualisations proprement mathématiques. Mais, peut-être ces conceptualisations prendraient-elles de la profondeur si elles étaient moins isolées du reste ?

1E. Apport pour l'enseignant.

Les enjeux sociaux et culturels auxquels se confronte aujourd'hui l'enseignement des mathématiques justifient suffisamment que tout enseignant réfléchisse sur les finalités de cet enseignement en particulier. Les postures prises a priori contre les mathématiques construites sur la base d'un rapport plutôt négatif et de mauvais souvenirs scolaires, ne sont pas propices à une telle réflexion. Il ne s'agit pas de nier la nature du rapport affectif aux mathématiques comme nous pouvons le voir au chapitre 3 ***mathématiques et affectivité***. Bien au contraire il s'agit de prendre en considération tant la répulsion que l'attirance pour les mathématiques, pour analyser ce qui, dans la pratique d'enseignement, peut fournir les conditions favorables au franchissement des inévitables obstacles à l'apprentissage des mathématiques. La prise en compte des dimensions sociale et culturelle à côté des dimensions cognitive et affective ne peut qu'enrichir les cadres d'analyse et favoriser l'intelligibilité des situations d'enseignement-apprentissage dont les enseignants ont la responsabilité dans leur mission.

Pour avancer, nous nous devons de développer des recherches nombreuses et précises sur les compétences mathématiques effectivement requises dans une grande diversité d'usages des mathématiques, ainsi que sur les étapes et les processus par lesquels les élèves maîtrisent progressivement, à travers des situations et des activités caractérisées avec précision, la diversité des savoirs et savoir-faire mathématiques qu'on attend qu'ils apprennent. Actuellement, nous restons encore trop souvent dans l'illusion. Ces recherches permettraient aux enseignants de mieux cerner les difficultés conceptuelles que rencontrent les élèves, parce qu'ils n'arrivent pas à remettre en question la transparence de leurs propres acquis, et à reconstituer le chemin que les élèves ont à parcourir. Ils se trompent parfois dans l'autre sens et voient des difficultés là où il y en a peu. Enfin, ils sous-estiment beaucoup la durée requise par le processus d'apprentissage pour parvenir à des étapes significatives de la formation des individus. Par ailleurs, il est aussi nécessaire de prendre effectivement en compte la grande diversités des compétences entre élèves à un âge donné.

L'aide à la conceptualisation du réel comme finalité d'enseignement peut être considérée comme intégrative des deux finalités que constituent la transmission d'un patrimoine scientifique et la formation des compétences mathématiques pour divers usages professionnels. Cette finalité est adaptée aux processus de développement et d'appropriation des connaissances qui gouvernent les apprentissages de l'élève. Mais en même temps, elle ne se suffit pas à elle-même car l'analyse de cette finalité renvoie nécessairement aux mathématiques comme science constituée et comme discipline de service.

Nous sommes une fois de plus renvoyés à des questions fondamentales telles que :

Quelle épistémologie ferait-on des savoirs et savoir-faire de l'élève si les mathématiques ne nous fournissaient une partie des outils pour les analyser ?

Quelle vision aurait-on de l'utilité des mathématiques pour l'élève si nous ne disposions pas d'une certaine vision des diverses utilisations des mathématiques dans les autres sciences et dans différentes professions ?

L'objectif de ce cours même est de contribuer à introduire ces considérations dans la conception de l'enseignement **[I.1-4]** des mathématiques à tous les niveaux d'enseignement.

Pour aller plus loin…

[I.1-1] Nimier J. (1989) *Entretien avec des mathématiciens. L'heuristique mathématique.* Villeurbanne : IREM de Lyon

[I.1-2] Vergnaud G, (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Peter Lang Berne

[I.1-3] Vergnaud G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *R. D.M.* 10/2-3, p. 133-170.

[I.1-4] Vergnaud, G., (1994) Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel., M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot (Eds) *Vingt ans de didactique des mathématiques* Grenoble : La pensée Sauvage, p.177-191

[I.1-5] Schwartz, L. (1997) *Un mathématicien aux prises avec le siècle*. Paris : O. Jacob

[I.1-6] Croizet, V., (1840) *Géodésie générale et méthodique des géodésies considérée sous le rapport de la mesure et de la division des terres*. Paris : Pélissonnier, libraire

[I.1-7] Le groupe Bourbaki a été fondé en 1935 par d'anciens élèves de l'École normale supérieure dont Henri Cartan, André Weil et Jean Dieudonné.

[I.1-8] Duval, R., (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages humains*. Berne : Peter Lang

[I.1-9] Damm R. (1992). *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*. Strasbourg : Thèse U.L.P

[I.1-10] Dhombres J, & al (1987) *Mathématiques au fil des âges*. Paris : Gauthier-Villars