Année 2016-2017 – semestre 6 – L3
Licence de sciences de l’éducation
Cours : Pédagogies, Didactiques, Évaluation des apprentissages
TD 3PAED026 – séance 1 à séance 5 : Didactique et Pédagogie des mathématiques

Bernard Coutanson, Fadhila Horrigue, Jean-Claude Régnier

Séquence d’évaluation

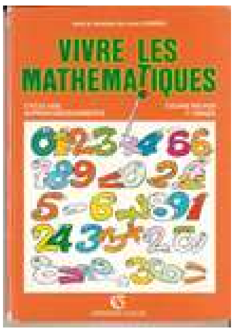
Le travail conduit lors de la séance 5 du TD du cours Pédagogies, Didactiques et Évaluation des apprentissages vise à l’élaboration d’un dossier réalisé en groupe d’au plus 4 ou éventuellement individuellement qui devra être terminé et rendu le 6 avril 2017 entre 14h – 17h (Bureau G317 – 86 Rue Pasteur). La 1ère page de couverture devra respecter le modèle ci-joint. Une grille d’évaluation présentant les critères sera elle-même mise à disposition.
Ces documents seront disponibles sur le site sur les pages dédiées 3PAED026 :
http://jean-claude.regnier.pagesperso-orange.fr/joao_claudio/3PAED016/3PAED026/3PAED026.htm

Pour réaliser les tâches proposées, il convient de prendre appui sur les notions développées lors du cours et des TD précédents mais aussi sur tout document ou toute ressource accessibles : manuels scolaires, programme, socle commun, documents pédagogiques divers, etc. Il est rappelé la nécessité de bien citer l’origine de tous les documents et les ressources utilisés.

Fractions et nombres décimaux au cycle 3

> Pour que les élèves comprennent pleinement les données numériques exprimées avec des fractions ou sous forme décimale, et puissent mobiliser ces nombres dans la résolution de problèmes, leur première approche de ces notions est essentielle. Elle doit d’abord s’appuyer sur des activités dans lesquelles le nombre entier montre ses limites ; les activités de calcul, décrochées ou en situation, viennent ensuite appuyer cette construction qui se fait sur toute la durée du cycle 3.

Tâche 1 : Pour commencer, expliciter ce qu’est, pour chacun d’entre vous, :
- Une fraction
- Un nombre décimal
- Le lien entre ces deux notions



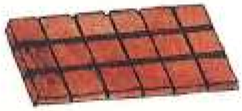
Tâche 2 : Voici trois énoncés de problème extrait d’un manuel scolaire
- Réaliser une analyse a priori de ces énoncés
- Résoudre ces problèmes
- Quelles connaissances et compétences sont mises en jeu dans ces trois énoncés de problème

7

Les élèves ont trois quarts d'heure pour faire un exercice. Ils travaillent depuis une demi-heure. De quelle durée disposent-ils encore ?

Maman a fait deux tartes de même grandeur. Elle a partagé la première en cinquièmes et la seconde en dixièmes.
$\frac{4}{5}$ de la première tarte ont été mangés et la même quantité pour la deuxième. Quelle fraction de la deuxième tarte a été mangée ?

8



Antoine, Julie, Pierre-Alain et Sandra se sont partagés cette tablette de chocolat. Voici ce qu'ils ont pris :
Antoine : $\frac{1}{6}$ Pierre-Alain : $\frac{1}{3}$ Julie : $\frac{5}{18}$ Sandra : $\frac{2}{9}$
Qui en a pris le plus ? Qui en a pris le moins ?
Toute la tablette a-t-elle été mangée ?

Tâche 3 : Lire le document : *Fractions et décimaux. Approches pédagogiques* de F. Boule

Tâche 4 : Expliciter :

- Les définitions de la notion de fraction et celles de nombres décimaux présentes qui apparaissent dans le texte.
- Les difficultés et obstacles qui peuvent être générés par chacune des entrées proposées.
- Les risques de confusion entre les notions, ceux de genèse d'obstacles didactiques et pédagogiques

Tâche 5 : En prenant appui sur ce que vous avez retiré des tâches précédentes, analyser les productions des élèves qui ont répondu à la question :

Qu'est-ce qu'une fraction ?

Élève 1	→ Une fraction, c'est par exemple 2 gâteaux coupés en 8 parts. $\frac{2}{8}$
Élève 2	→ une fraction, c'est par exemple on prend 3 parts de gâteau pour 4 parts (exemple $\frac{3}{4}$)
Élève 3	→ Une fraction, c'est : $\frac{4}{5}$ donc le nombre du haut (4) est divisé par le nombre du bas (5)
Élève 4	→ une fraction c'est un trait avec 1 chiffre dessus 1 chiffre dessous
Élève 5	→ Une fraction, c'est "ça peut être un nombre avec une , exemple " 4,8 " cela se lit quatre huitième ou $\frac{4}{8}$.

Est-ce que $\frac{13}{7}$ est une fraction ?

Elève 1	→ $\frac{13}{7}$ est une fraction impossible puisque si tu coupes un gâteau en 7 tu ne peut prendre 13 morceaux
Elève 4	→ $\frac{13}{7}$ = elle est fausse

Tâche 6 : En recherchant dans les ressources mises en ligne sur le site du Ministère de l’éducation nationale, quelles sont les connaissances et compétences relatives aux fractions et nombres décimaux visées dans les programmes du cycle 3 lors de l’année 2016-2017 ?.

Format de la 1ère page de couverture du dossier

Année 2016-2017 – semestre 6 – L3
Licence de sciences de l'éducation
Cours : Pédagogies, Didactiques, Évaluation des apprentissages
TD 3PAED026 – séance 1 à séance 5 : Didactique et Pédagogie des mathématiques

Bernard Coutanson, Fadhila Horrigue, Jean-Claude Régnier

Dossier de pédagogie et didactique des mathématiques

Codes Filière : A=L3 MEEP – B=L3 FAEP – C=L3 ESH

Codes Groupe de TD n° : 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8

N° étudiant	Nom :	Prénom :	Filière	Groupe TD

Fractions et décimaux
Approches pédagogiques

Fractions et décimaux constituent un domaine dont l'abord (définitions, calculs) est réputé difficile, et que les programmes scolaires étendent du cycle III au collège. On ne s'attardera pas ici sur l'objet mathématique (définition des rationnels). Il s'agit plutôt de comparer quelques présentations diverses, plus ou moins anciennes et d'en signaler les avantages et les inconvénients, aucune ne semblant, malgré les nombreuses recherches didactiques des vingt dernières années, éviter tous les obstacles et mériter une préférence définitive. A la suite de cette petite revue, deux démarches seront présentées, dont on peut espérer qu'elles permettent de renouveler l'intérêt des élèves et d'établir des représentations et des procédures efficaces.

Une distinction quasi-rituelle consiste à séparer les « fractions simples » des autres ; les premières sont celles qui portent un nom particulier en français (une moitié, un demi, un tiers, un quart) et qui par conséquent appartiennent au vocabulaire et à l'expérience courante des enfants. Une représentation classique associe à ces fractions de l'unité un secteur angulaire :

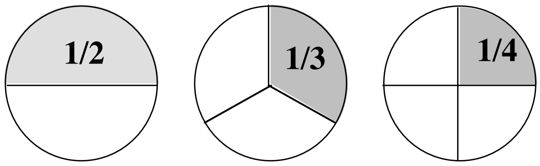


fig. 1

On reviendra plus tard sur les inconvénients de cette représentation. Remarquons au passage plusieurs caractéristiques : le numérateur est 1 ; elles sont inférieures à l'unité ; elles sont classiquement représentées par une barre de fraction horizontale ou oblique (comme ci-dessus).

Une approche historiquement ancienne (antérieure à 1970) consiste à définir une fraction comme une division à faire : « **17/3 = diviser 17 par 3** » ; l'écriture et la technique de la division étant supposées connues, cette définition permet de disposer aussitôt d'un décimal aussi proche que l'on veut, en poursuivant la division. Cette définition, qui a l'avantage de présenter parallèlement fraction et encadrement décimal, ne donne pas un *statut de nombre* aux fractions, ce qui rend vide de sens leur addition (on ne peut "additionner" des procédures) ou leur produit. La comparaison est rendue difficile, voire faussée puisqu'on ne peut comparer par exemple 3/17 et 2/11 sans passer par une approximation décimale. La maîtrise très incertaine de la division avec quotient décimal rend cette définition, non seulement insatisfaisante, mais malaisée. On pourrait penser que l'usage des calculettes est de nature à faciliter cette approche. Il n'en est rien puisque la calculette rend un résultat tronqué. La définition, qui confondrait alors 2/3 et 0.666666, en devient fautive.

Une approche de nature voisine, et qui a eu un succès certain dans les années 70 est fondée sur l'usage des « opérateurs ». Un opérateur est défini par la donnée de deux listes (fig. 2)

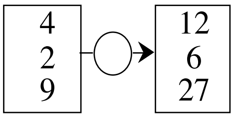


fig.2

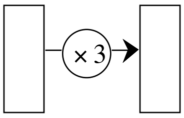


fig.3

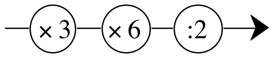


fig.4

Ainsi défini fonctionnellement, un opérateur peut être étudié indépendamment des listes, et notamment être intégré dans des chaînes (fig. 3). Ces chaînes permettent commutations, associations et réductions.

Une fraction est définie comme une chaîne composée d'une multiplication et d'une division (fig.5).

fig. 5

Cette définition peut sembler relever d'un certain arbitraire. Mais elle facilite beaucoup l'étude de certaines propriétés et particulièrement l'usage du calcul multiplicatif. En effet, moyennant un léger flou initial (qui risque peu de froisser les élèves), on accepte volontiers la commutativité et l'associativité des opérateurs. En revanche elle a deux inconvénients majeurs. D'une part le *nombre* **4** et la *fraction* × **4** sont, par définition, des objets de nature différente, et il faut *admettre* que × **1/2** opérant sur le nombre 1 produit le *nombre* 1/2. D'autre part, comme précédemment, la comparaison et surtout l'addition d'opérateurs sont dépourvues de sens.

Ces approches peuvent être appelées "fonctionnelles" puisqu'elles privilégient une propriété algébrique.

La première approche qui sera présentée ci-dessous offre quelque parenté avec celle-là :

Un automate, partant du zéro d'une graduation, arrive au point 7 en trois sauts (fig. 6).

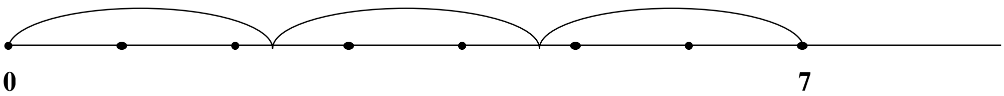


fig. 6

Un saut est un *déplacement*, mais on lui associe implicitement la *longueur* du saut, qui est repérée par un nombre. C'est l'avantage de cette définition par rapport à la précédente. Mais on retrouve le même arbitraire formel lorsque l'on désigne ce saut par la *fraction* 7/3.

Le versant "transformations" du contexte des sauts permet d'étudier aisément les équivalences, c'est-à-dire la "simplification" des fractions, de laquelle découle les procédures de calcul. En revanche la

signification des opérations somme et produit réclame, comme on va le voir, de recourir au versant "mesure".
Les approches suivantes privilégient toutes une relation avec la mesure.

La première, d'usage encore très répandu, consiste à utiliser la représentation proposée fig. 1. Mais elle a un grave inconvénient : elle permet difficilement d'aborder des fractions supérieures à l'unité. En effet on n'a pas de mal à accepter que la partie grisée (fig. 7) représente un tiers, même en l'absence du disque référence.

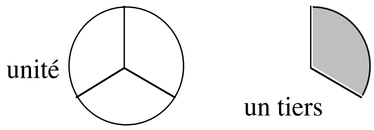


fig.7

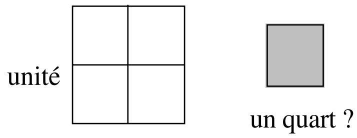


fig. 8

En revanche si la figure de référence n'est pas un disque (fig. 8) la partie grisée n'a plus de sens en l'absence de l'unité de référence. Ce qui est pire encore, c'est la représentation d'une fraction supérieure à l'unité. La figure 9 représente-t-elle 4/3 ou bien 4/6 ?

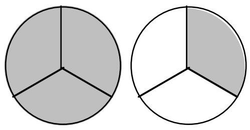


fig. 9

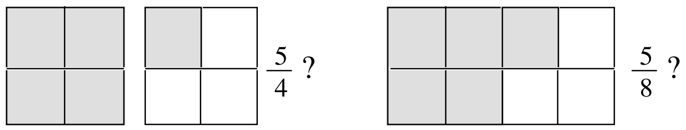


fig.10

On voit mieux encore le risque de confusion si l'unité de référence n'est pas un disque (fig. 10). Par ailleurs, si cette approche facilite les comparaisons et additions de fractions de même dénominateur, elle n'est pas opérante en ce qui concerne les comparaisons de fractions quelconques et le produit d'une fraction par un entier ou le produit de deux fractions.

Une dernière approche permet de définir fractions et décimaux par un système de mesure.
On considère un objet L à mesurer et une unité de longueur U, subdivisée en dix sous-unités V :

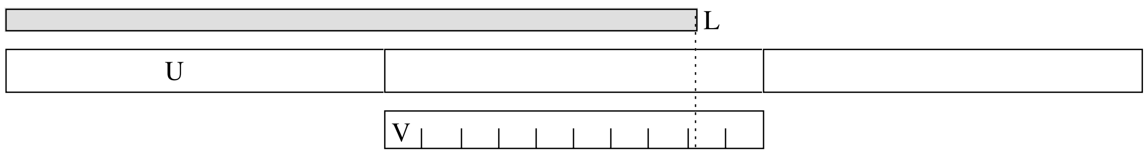


fig. 11

On peut écrire d'abord U < L < 2 U, puis 1U 8V < L <1U 9V. Ou encore 18 V < L < 19V. Le processus peut se poursuivre. On définit ainsi un *système* (U,V,W…). La position de l'unité **principale** U est marquée par une virgule :

Def. : 18V = 1U 8V = 1,8 U

Si, au lieu d'un partage en dix parties, on utilise un partage en trois, on créé une subdivision en tiers. C'est la seconde approche qui sera développée ci-dessous.

Elle présente un avantage considérable qui est de permettre rapidement des comparaisons empiriques, en constituant diverses graduations, et de donner une interprétation très accessible de l'addition et même (quoique moins simple) de la multiplication. Deux difficultés se présentent cependant, dont l'une est de caractère théorique.

La première est due à la *confusion* de la *longueur* et du *repère* de l'extrémité :

fig. 12

La seconde difficulté, plus théorique, n'est certainement pas un obstacle pédagogique : il est nécessaire *d'admettre* que la formule donnant l'aire d'un rectangle, que l'on peut établir pour des côtés dont les mesures sont des entiers est encore valable pour des côtés dont les mesures ne sont pas entières.

Cette définition a l'intérêt de lier fermement les décimaux aux fractions et permet de ramener les comparaisons et tous les calculs sur des décimaux à des calculs sur des entiers par translation d'unité principale :

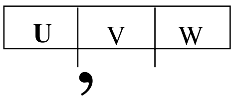


fig.13

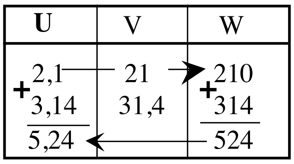


fig.14

Ce système fonctionne bien tant que l'on conserve la base dix, c'est-à-dire les *décimaux* et *fractions décimales*. La définition de 2/3 comme “nombre à virgule” obligerait à recourir à la base trois, ce qui n'est pas souhaitable puisque les bases autres que dix n'ont aucun usage au-delà du CP. Mais ce système a l'avantage d'offrir un recours simple et sûr en cas de difficulté, notamment concernant la comparaison et l'ordre et en particulier dans le cas de l'erreur classique qui consiste à confondre *a, b* avec le couple *(a , b)*. Mais, pour l'addition, il oblige à un détour par le tableau ci-dessus, plus compliqué encore lorsqu'il s'agit de la multiplication.

En résumé, une bonne représentation des fractions et des décimaux doit :

- *s'appuyer sur une mesure (par exemple de longueur),*
- *favoriser le repérage d'une fraction ou d'un décimal par rapport à d'autres,*
- *ne pas favoriser les fractions inférieures à l'unité,*
- *donner un moyen d'établir et de consolider les procédures de calcul.*