

## Logique de construction de la séance TD n°4

Si l'on part du principe que la séance suivante (n°5) sera consacrée à un travail de groupe servant d'évaluation de ce TD, nous proposons de construire le contenu suivant pour la séance n°4 en évoquant:

- **les interférences qui entrent dans le couple enseignement / apprentissage des mathématiques**
- **les difficultés d'aider l'élève à passer de son niveau de conceptualisation actuel à un niveau supérieur.**

**1/ Partie « théorique »** : Il s'agit de revenir brièvement sur les apports du cours magistral et d'apporter des compléments:

- La théorie de **la transposition didactique de Yves CHEVALLARD** (illustrée elle-même par des approches « culturelles » différentes d'une même situation proposée à des élèves)
- La théorie des **champs conceptuels de Gérard VERGNAUD** (en revenant très vite sur les structures additives)
- La théorie des **jeux de cadres de Régine DOUADY** et la théorie **des registres sémiotiques de Raymond DUVAL**

**2/ Partie « pratique »** : Pas de retour sur des situations proposées lors de la séance 1 mais plutôt le choix de laisser plus de place à l'analyse des productions des élèves en géométrie et une portant sur la mesure des durées.

## Didactique et pédagogie des mathématiques

### Séance n°4 du 08/03/17

---

Retour sur...

La théorie de la transposition didactique  
Yves CHEVALLARD

## La transposition didactique ...

Tous les contenus des diverses formes de savoirs sont soumis à **des effets** induits par :

- des choix culturels,
- des « rapports de force »,
- les outils pédagogiques mis à disposition,
- le profil des enseignants,
- ...

3

<http://www.apprendreamultiplier.com/multiplication-technique-russe>

$$43 \times 3215 =$$

Algorithme dit à la grecque		Algorithme dit à la russe	
		$\begin{array}{r} 43 \quad 3215 \quad \dots \quad 3215 \\ 21 \quad 6430 \quad \dots \quad 6430 \\ 10 \quad 12860 \\ 5 \quad 25720 \quad \dots \quad 25720 \\ 2 \quad 51440 \\ 1 \quad 102880 \quad \dots \quad 102880 \\ \hline 138245 \end{array}$	

11) le résultat est  $12 \times 23 = 276$

$12 \times 23 = ?$	
pair	<del>1 2</del>   <del>2 3</del>
pair	<del>6</del>   <del>4 6</del>
impair	3   9 2
impair	1   1 8 4
$92 + 184 = 276$	
$12 \times 23 = 276$	

<https://haut-poirier.jimdo.com/math%C3%A9matiques/calcul-en-ligne-et-pos%C3%A9/multiplication-%C3%A0-la-grecque/>

4

## Multiplication dans la forme scolaire usuelle

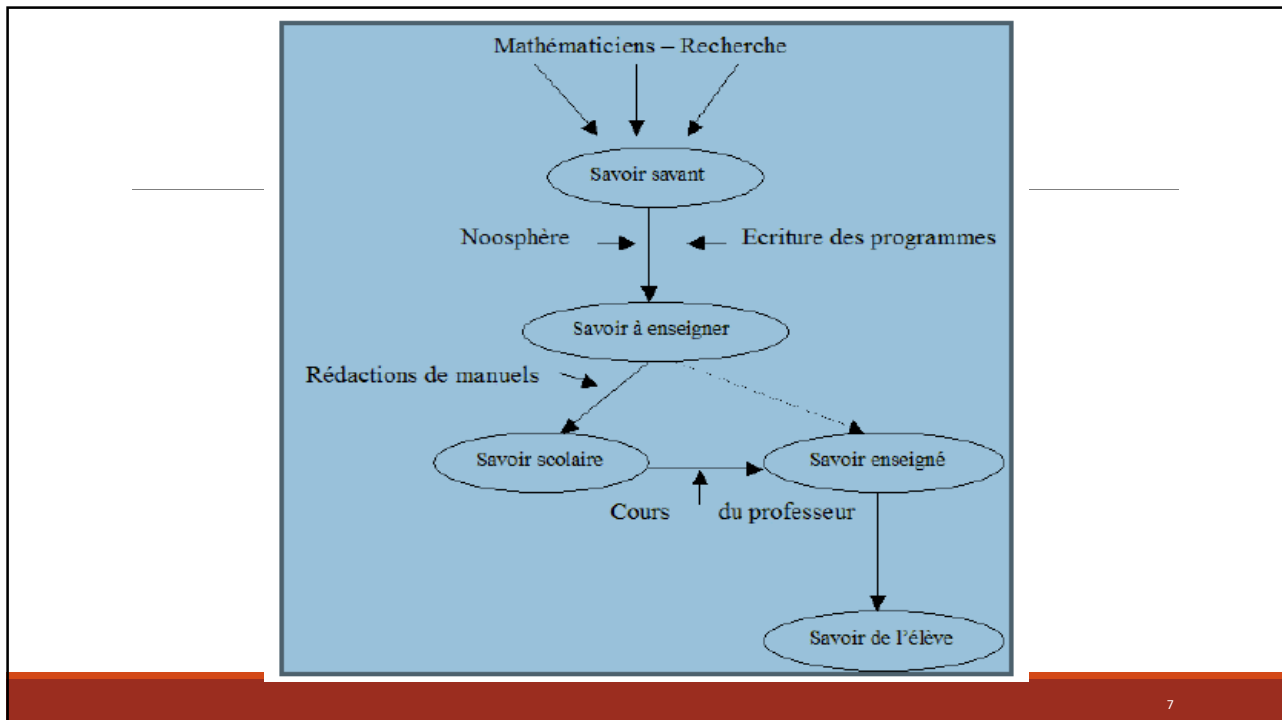
<b>345 x 623 = ?</b>		
<b>345</b>	<b>x 623</b>	J'additionne:
	<b>1035</b>	001035
<b>+</b>	<b>690</b> ■	+ 006900
<b>+</b>	<b>2070</b> ■ ■	+ 207000
<b>=</b>	<b>214935</b>	= 214935
		Conclusion: <b>345 x 623 = 214935</b>

5

La théorie a repéré plusieurs stades de savoirs :

- le savoir savant
- le savoir à enseigner
- le savoir scolaire
- le savoir enseigné
- le savoir de l'élève.

6



7

## Analyse didactique a priori

⌘ Anticipation de la résolution de problèmes mathématiques par les élèves

Quelle modélisation vont-ils appliquer à la situation proposée par l'enseignant ?

8

## Énoncé

Pour préparer une séance au cycle 3, on envisage les énoncés suivants.

**Énoncé 1 :** Paul et André décident de mettre leurs billes en commun au début de la récréation. Paul a 10 billes et André a 20 billes.

À la fin de la récréation, ils ont 42 billes et se demandent comment les partager.

**Énoncé 2 :** Paul et André décident de mettre leurs billes en commun au début de la récréation. Paul a 5 billes et André a 25 billes.

À la fin de la récréation, il ne leur reste plus que 12 billes et ils se demandent comment les partager.

**Énoncé 3 :** Élodie, Juliette et Hélène décident de mettre leurs billes en commun au début de la récréation. Élodie a 3 billes, Juliette en a 6 et Hélène en a 4.

À la fin de la récréation, elles en ont 52 et se demandent comment les partager.

**Énoncé 4 :** Un magasin décide d'augmenter ses prix : un disque passe de 45 F à 47 F, une radio de 420 F à 435 F et une chaîne hi-fi de 3 900 F à 4 000 F. On souhaite comparer ces augmentations.

Vous vous efforcerez de justifier et expliciter vos idées.

### Partie 1

- Quelle notion mathématique peut-on enseigner en exploitant ces situations? Quel(s) aspect(s) de la notion peut-on mettre en évidence dans cet enseignement?
- Chacun de ces problèmes peut conduire à plusieurs solutions. se référant ou ne se référant pas à la notion ci-dessus évoquée : présentez-les brièvement.

Énoncé n° 1 : Paul et André ont gagné 12 billes.

Plusieurs stratégies possibles

			Paul	André																
Première réponse possible	Ils prennent la moitié du gain (6).		16	26																
Deuxième réponse possible	Ils se partagent la moitié de leur possession finale (21).		21	21																
Troisième réponse possible	Ils effectuent un partage proportionnel.	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Total</th> <th>Paul</th> <th>André</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>D</td> <td>30</td> <td>10</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>F</td> <td>42</td> <td>14</td> <td>28</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		Total	Paul	André	D	30	10	20	F	42	14	28					14	28
	Total	Paul	André																	
D	30	10	20																	
F	42	14	28																	

Enoncé n° 2 : Paul et André ont perdu 18 billes.

			Paul	André			
Première réponse possible	Ils prennent en charge la moitié de la perte (9).		$5 - 9 = X$ donc 0	Et donc André garde les 12 billes.			
Deuxième réponse possible	Ils se partagent la moitié de leur possession finale (6).		6	6			
Troisième réponse possible	Ils effectuent un partage proportionnel du reste.		2	10			
					<b>Total</b>	<b>Paul</b>	<b>André</b>
		<b>D</b>			<b>30</b>	<b>5</b>	<b>25</b>
		<b>F</b>			<b>12</b>	<b>2</b>	<b>10</b>

11

Enoncé n° 3 : Les trois filles ont gagné 39 billes.

			Elodie	Juliette	Hélène				
Première réponse possible	Elles prennent le tiers du gain (13).		16	19	17				
Deuxième réponse possible	Elles se partagent leur possession finale (52).	Mais 52 ne se partage pas par trois ! $(17 \times 3) + 1$	17	17	18				
Troisième réponse possible	Ils effectuent un partage proportionnel .		12	24	16				
						<b>Tot.</b>	<b>Elo.</b>	<b>Juli.</b>	<b>Hélè.</b>
		<b>D</b>				<b>13</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>4</b>
		<b>F</b>				<b>52</b>	<b>12</b>	<b>24</b>	<b>16</b>

12

Enoncé n° 4 : **Montant des augmentations**

	<b>Disque</b>	<b>Radio</b>	<b>Chaîne hi-fi</b>

13

Enoncé n° 4 : **Montant des augmentations**

	<b>Disque</b>	<b>Radio</b>	<b>Chaîne hi-fi</b>
<b>Ancien prix</b>			
<b>Nouveau prix</b>			

14

## Enoncé n° 4 : Montant des augmentations

	<b>Disque</b>	<b>Radio</b>	<b>Chaîne hi-fi</b>
<b>Ancien prix</b>	<b>45</b>	<b>420</b>	<b>3900</b>
<b>Nouveau prix</b>	<b>47</b>	<b>435</b>	<b>4000</b>

15

## Enoncé n° 4 : Montant des augmentations

	<b>Disque</b>	<b>Radio</b>	<b>Chaîne hi-fi</b>
<b>Ancien prix</b>	<b>45</b>	<b>420</b>	<b>3900</b>
<b>Nouveau prix</b>	<b>47</b>	<b>435</b>	<b>4000</b>
<b>Augmentation absolue</b>			

16



Enoncé n° 4 : Montant des augmentations

	<b>Disque</b>	<b>Radio</b>	<b>Chaîne hi-fi</b>
<b>Ancien prix</b>	<b>45</b>	<b>420</b>	<b>3900</b>
<b>Nouveau prix</b>	<b>47</b>	<b>435</b>	<b>4000</b>
<b>Augmentation absolue</b>	<b>2</b>	<b>15</b>	<b>100</b>

Enoncé n° 4 : Montant des augmentations

	<b>Disque</b>	<b>Radio</b>	<b>Chaîne hi-fi</b>
<b>Ancien prix</b>	<b>45</b>	<b>420</b>	<b>3900</b>
<b>Nouveau prix</b>	<b>47</b>	<b>435</b>	<b>4000</b>
<b>Augmentation absolue</b>	<b>2</b>	<b>15</b>	<b>100</b>
<b>Augmentation relative</b>			

Énoncé n° 4 : **Montant des augmentations**

	<b>Disque</b>	<b>Radio</b>	<b>Chaîne hi-fi</b>
<b>Ancien prix</b>	<b>45</b>	<b>420</b>	<b>3900</b>
<b>Nouveau prix</b>	<b>47</b>	<b>435</b>	<b>4000</b>
<b>Augmentation absolue</b>	<b>2</b>	<b>15</b>	<b>100</b>
<b>Augmentation relative</b>	<b>0,044</b>	<b>0,035</b>	<b>0,0256</b>

19

**Didactique et pédagogie des mathématiques**  
**Séance n°4 du 08/03/17**

Retour sur...

La théorie des champs conceptuels  
 Gérard VERGNAUD

20

## La théorie des champs conceptuels de Gérard VERGNAUD

### 1/ Les schèmes

- Le but
- Les anticipations
- Les règles d'action
- Les invariants opératoires
- Les inférences

### 2/ Les concepts

- Les invariants opératoires
- Les situations
- Les signifiants langagiers

### 3/ Les champs conceptuels

- Définition
- Les structures additives
- Les signifiants et signifiés

### 4/ Les conceptions ou représentations des élèves

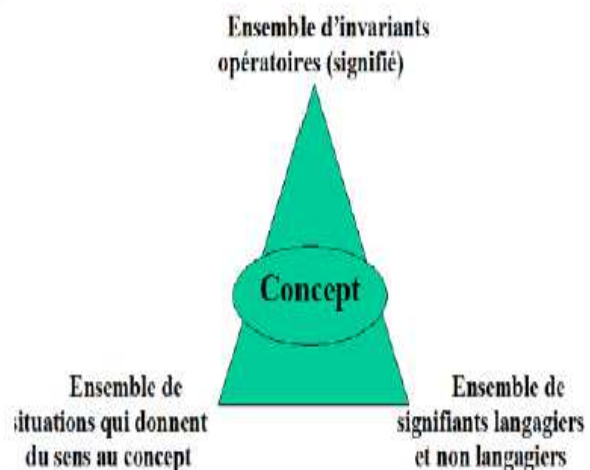
21

Ainsi un concept est la donnée de trois ensembles :

**Signifié** : l'ensemble des invariants opératoires, propriétés spécifiques du concept

**Référence** : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept ;

**Signifiant** : l'ensemble de termes, de dénomination ou de symboles représentant le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement



22

Un certain nombre de champs conceptuels a été bien étudié à l'heure d'aujourd'hui :

- *les structures additives*
- *les structures multiplicatives*
- *la proportionnalité*
- *la résolution d'équation*

## Didactique et pédagogie des mathématiques

### Séance n°4 du 08/03/17

---

Retour sur...

La théorie des jeux de cadres  
Régine Douady

Quant à la notion de "cadre mathématique", elle renvoie à celle de cadre théorique, c'est-à-dire ce qui est constitué "par les objets d'une branche mathématique, par les relations entre ces objets, par leurs formulations diverses et les images mentales qui leur sont associées. Ainsi parle-t-on de cadre géométrique ou de cadre algébrique. Les changements de cadres conduisent à des changements de formulation 'un problème voire même à des changements de problème. Selon Régine Douady, ils sont un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement équivalentes permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.

25

Ce qui est abstrait aujourd'hui pour un élève sera concret pour lui après-demain, lorsqu'il aura parfaitement délimité et analysé l'objet nouveau ainsi construit. Désigner cet objet par un mot nouveau, une expression nouvelle ou un symbolisme nouveau est une aide à la conceptualisation et non pas une gêne. Ce qui gêne les élèves, par contre, c'est de leur présenter les symboles mathématiques comme des objets ou de laisser penser aux élèves qu'il pourrait en être ainsi, faute d'établir avec eux la signification des concepts enseignés en les référant aux situations qu'ils permettent de penser et de traiter. La signification des concepts mathématiques ne vient pas principalement des symboles qui les représentent, mais des situations et des activités qu'ils contribuent à conceptualiser. Certaines de ces situations sont proprement mathématiques, mais ce n'est pas le cas de toutes. Il serait préjudiciable de méconnaître cette double fonction des mathématiques.

26

## Didactique et pédagogie des mathématiques

### Séance n°4 du 08/03/17

---

Retour sur...

La théorie des registres sémiotiques de représentation  
Raymond DUVAL

27

---

Un registre désigne les différents systèmes sémiotiques utilisables pour présenter une information ou objectiver une représentation mentale. Il est constitué de signes et réalise un moyen d'expression ou de représentation d'un objet, d'une idée ou d'un concept. Changer de registre sémiotique implique une réorganisation de la présentation d'une connaissance.

28

---

Plaçons dans la cadre théorique de la géométrie, nous pouvons disposer :

- du registre figuratif, rattaché à la perception visuelle ou tactile, munie de ses propres lois d'organisation.
- du registre du langage naturel permettant de décrire et d'expliciter la statut des énoncés.
- du registre du langage symbolique permettant d'écrire et de recourir à des formules.

29

---

Si nous prenons comme exemple le concept de fonction, nous pouvons identifier le recours à trois registres de représentation :

- un registre "tableaux"
- un registre "graphiques"
- un registre "algébrique".

30

Revenons ici, sur le concept de **registres sémiotiques** (Duval, 1993) : un registre sémiotique répond aux trois caractéristiques suivantes :

- de **communication** (idée d'ordre non équivoque, évident, sans besoin d'explicitation de clés de lecture, pour présenter l'information)
- de **traitement** (rendu possible sur les données contenues grâce à l'outil même d'exposition utilisé)
- de **conversion** (possibilité de traduire les données exposées dans un autre registre, avec la possibilité de les prendre une par une, et de les convertir de la même manière dans un autre registre).

31

C'est le cas pour : les listes, le langage naturel, les tableaux, les diagrammes, les graphiques, les cartes, les illustrations. Et d'après les actes du XXXII<sup>ème</sup> colloque COPIRELEM de l'IREM de Strasbourg en 2006 (pp. 67-89), il faut s'interroger sur les processus cognitifs sous-jacents aux démarches mathématiques. Une activité mathématique est un acte de fusion selon 2 types de **transformation** :

- La première concerne tout changement de registre de représentation.
- L'autre consiste à utiliser les possibilités de transformation propre à chaque registre.

32



▪ Analyse des registres de représentation (V6) :

Rappel de l'analyse des manuels des élèves de cycle III

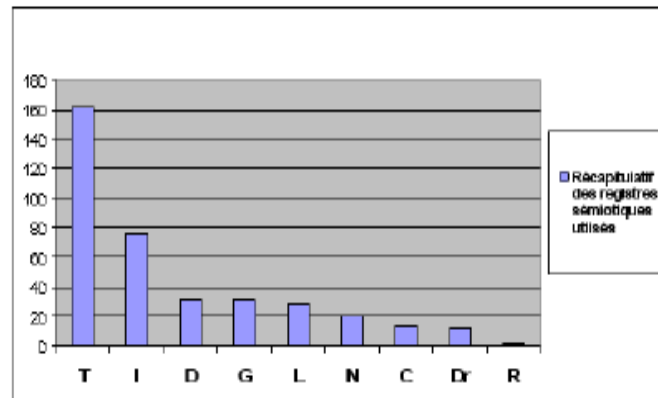


Figure 60 : Les registres de représentation dans les manuels des élèves

33

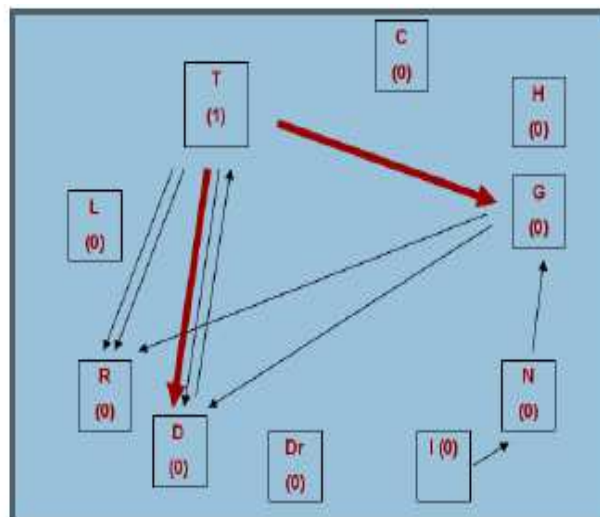


Figure 64 : Schéma des parcours sémiotiques des candidats au CRPE

34

## Analyse didactique a posteriori

---

⌘ Analyse de la résolution de problèmes mathématiques par les élèves

Quelles connaissances et compétences sont à l'œuvre chez les élèves?

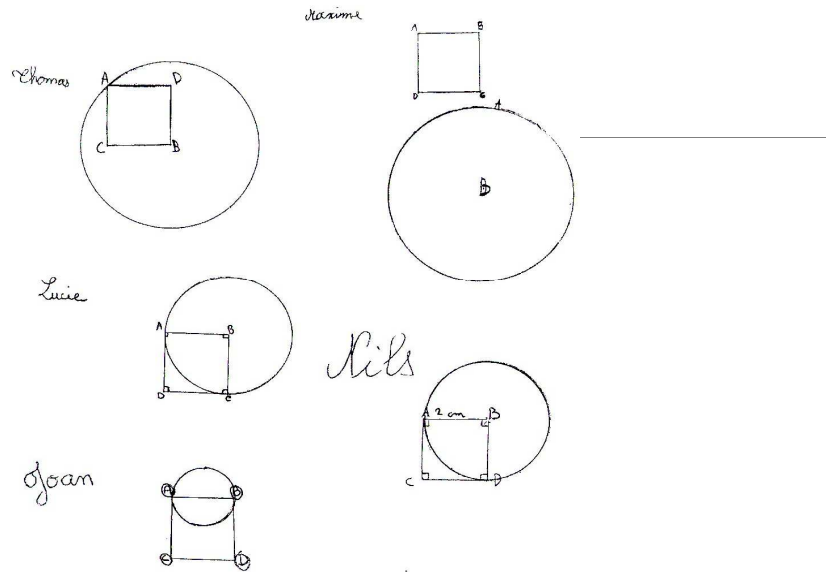
## Problèmes de géométrie ...

---

Tracer un carré ABCD de côté 2 cm

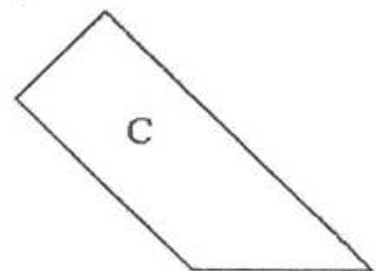
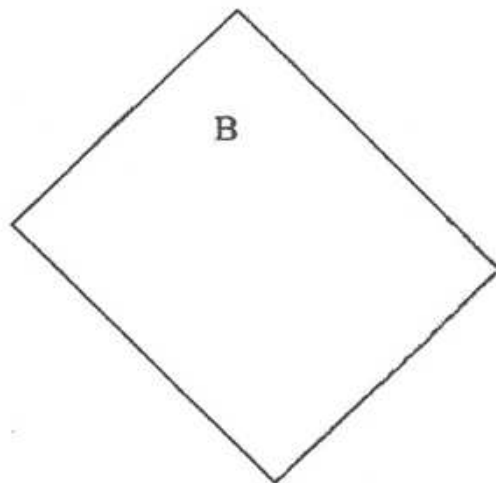
Tracer un cercle de centre B passant par A

Trace le carré ABCD de côté 2 cm.  
Trace le cercle de centre B passant par A.



37

Est-ce un rectangle?



38

## ELEVE A

Figure	Est-ce un rectangle ? Entoure la bonne réponse.	Explique comment tu t'en es aperçu.
A	<input checked="" type="radio"/> OUI    NON	C'est un rectangle parce que les côtés sont droites.
B	<input checked="" type="radio"/> OUI    NON	Parce que il y a 4 sommets et 4 côtés.
C	OUI <input checked="" type="radio"/> NON	Parce qu'il y a 1 côté qui il est pas comme les autres.

39

## ELEVE B

Figure	Est-ce un rectangle ? Entoure la bonne réponse.	Explique comment tu t'en es aperçu.
A	OUI <input checked="" type="radio"/> NON	parce que les 2 petits côtés sont penchés
B	<input checked="" type="radio"/> OUI    NON	parce que les deux grands mesure pareille et les deux petits aussi
C	OUI <input checked="" type="radio"/> NON	parce que les côtés de mesure pas pareille.

40

## ELEVE C

Figure	Est-ce un rectangle ? Entoure la bonne réponse.	Explique comment tu t'en es aperçu.
A	OUI <input checked="" type="radio"/> NON	car il n'a pas d'angles droits
B	<input checked="" type="radio"/> OUI    NON	Oui car il a deux parallèles de 4,2 cm et deux autres de 3,1 cm et il a 4 angles droits
C	OUI <input checked="" type="radio"/> NON	car il a que deux angles droits.

41

## ELEVE D

Figure	Est-ce un rectangle ? Entoure la bonne réponse.	Explique comment tu t'en es aperçu.
A	OUI <input checked="" type="radio"/> NON	Les parallèles ne sont pas droites
B	<input checked="" type="radio"/> OUI    NON	Les parallèles sont droites et il ne sont pas de la même longueur.
C	OUI <input checked="" type="radio"/> NON	Les parallèles ne sont pas égales.

42

## Problèmes numériques...

Je suis parti à neuf heures moins dix. Je suis arrivé à 10h40.

Quelle a été la durée de mon parcours?

43

Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

**Mélanie :**

$$9\text{h} + 10\text{m} + 1\text{h} + 40\text{m} = 1\text{h} 50$$

Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

**Thomas :**

$$\text{Il a mit } 30 \text{ min} \cdot 10\text{h}40 - 9\text{h}50 = 30\text{m}$$

Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

**Sabrina :**

j'ai trouvé en ajoutant 10+40  
j'ai parcourus 50 mètres

Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

**Kevin :**

$$\begin{array}{r} 3 \\ 70 \\ 70 \\ 40 \\ \hline 69 \end{array} \quad 1\text{h}69$$

44