Didactique des mathématiques et de la statistique

Cours de Jean-Claude Régnier

3. Théorie des champs conceptuels.

Cette théorie a été développée, dans les années 80, par Gérard Vergnaud, psychologue cognitiviste et didacticien des mathématiques. Ici nous abordons, avec cette théorie, le versant cognitiviste de la didactique des mathématiques : l'étude du rapport élève – savoir du triangle didactique. Nous rappelons que la théorie des champs conceptuels est également abordée en tant que théorie psychologique dans le cadre du cours de **psychologie de l'éducation [II.3-5].**

Laissons Gérard Vergnaud définir cette théorie **[II.3-1]** : « La théorie des champs conceptuels est une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques. (…) C'est notamment une théorie psychologique du concept, ou mieux encore, de la conceptualisation du réel : elle permet de repérer et d'étudier les filiations et les ruptures entre connaissances, du point de vue de leur contenu conceptuel ; elle permet également d'analyser la relation entre les concepts comme connaissances explicites, et les invariants opératoires qui sont implicites dans les conduites des sujets en situation, ainsi que d'approfondir l'analyse des relations entre signifiés et signifiants.»

Nous allons dans ce qui suit définir un certain nombre de termes employés dans cet extrait de Gérard Vergnaud. Ce dernier affirme qu'un **concept mathématique** ne se limite pas à sa définition mais regroupe tout un ensemble de situations où ce concept est opérationnel. Une définition en soi n'est rien, inutile de connaître la définition de grandeurs proportionnelles, si on est incapable de reconnaître une situation de proportionnalité.

3A Les Schèmes

Gérard Vergnaud a recours à la notion de schème qui désigne une organisation invariante de la conduite du sujet qui permet de traiter une classe donnée de situations.

Nous pouvons donner l'exemple du dénombrement de petites collections qui mobilise le schème du dénombrement. Quand un sujet dénombre un ensemble de cardinal 6, par exemple, nous pouvons remarquer une invariance dans la façon dont il organise sa conduite. Celle-ci est identique quelle que soit la nature de la collection à dénombrer :

- par un geste de la main ou des yeux, le sujet va isoler l'objet qu'il est en train de dénombrer des autres,
- il va énoncer alors le nombre correspondant à cet objet « un, deux, trois, … »,
- il va s'arrêter sur le dernier nombre énoncé « six, six. ».

Le schème fonctionne comme un tout, il comporte l'organisation des gestes, des formes langagières, des opérations de pensée.

Gérard Vergnaud propose un autre exemple : le schème de l'algorithme de l'addition de nombres entiers :

- « commencer par la colonne des unités, la plus à droite,
- continuer par la colonne des dizaines, puis des centaines, …

- calculer la somme des nombres dans chaque colonne. Si la somme des nombres dans une colonne est inférieure à dix, inscrire cette somme sur la ligne du total. Si elle égale à ou supérieure à dix, écrire seulement le chiffre des unités de cette somme et retenir le chiffre des unités des dizaines, que l'on reporte en haut de la colonne immédiatement située à gauche, pour l'ajouter aux autres nombres de cette dernière colonne,
- et ainsi de suite en progressant de droite à gauche, jusqu'à épuisement des colonnes. »

Il est évident qu'un enfant peut réaliser sans difficulté ce schème mais être incapable de le mettre en mots. La part de l'implicite peut être très grande dans les schèmes.

Quatre composantes du schème peuvent être définies :

- le but et les anticipations ;
- les règles d'actions et d'enchaînement opérationnel des opérations ;
- les invariants opératoires ;
- les inférences.

Prenons un exemple pour identifier ces quatre composantes : le schème du dénombrement de petites collections. Le but de ce schème est d'associer à une collection un entier naturel (le cardinal).

Les anticipations peuvent être par exemple de reconnaître si cette association est valide ou non. Il est clair qu'un sujet ne va pas enclencher ce schème pour mesurer le volume d'un liquide. Pour effectuer ce schème, plusieurs règles s'imposent : ne pas compter deux fois le même objet, ne pas en oublier.

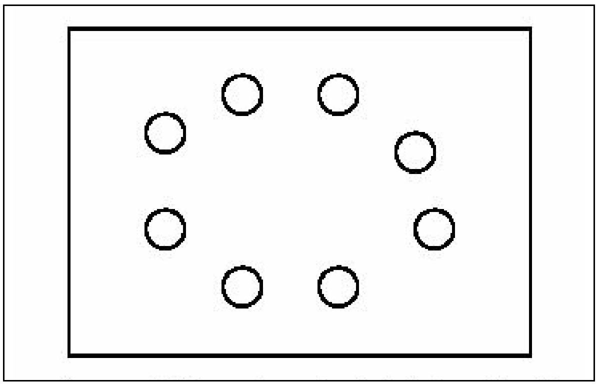
On peut repérer un certain nombre d'invariants opératoires. Nous trouvons le type **théorème-en-acte** comme « le cardinal est indépendant de la nature des objets » qui est une proposition tenue pour vraie sur le réel, souvent implicite dans l'action, permettant le raisonnement et l'action. Nous trouvons aussi le type **concept-en-acte** comme « les notions de successeur, itération, etc.. ». Nous rappelons que face à une classe de situations, les sujets apprenants peuvent atteindre le but en mettant en œuvre des procédures utilisant aussi ce qui est nommé concept-en-acte, qui n'est pas une proposition mais qui possède un caractère fonctionnel.

Enfin, les inférences, qui dépendent de la situation, sont des éléments obtenus à partir d'informations et du but recherché, et permettent au sujet de réguler et de contrôler son action. Par exemple, l'enfant recommencera la réalisation de ce schème de dénombrement car il aura contrôlé qu'il a compté deux fois le même objet ou abandonnera ce schème car il aura repéré que ce schème n'est pas adapté à sa situation.

Les schèmes ont tout leur intérêt pour analyser les erreurs des élèves. Celles-ci peuvent provenir :

- d'une mauvaise adaptation d'un schème à la particularité d'une situation.

Pour dénombrer le nombre de ronds dans l'image ci-dessous, l'enfant ne va pas repérer son point de départ, de sorte qu'il risque de compter deux fois le dernier objet ou d'en oublier un. La particularité de la situation provient du fait que les objets à dénombrer suivent une « ligne fermée » et donc qu'il est indispensable de repérer le premier objet dénombré. Ceci serait sans difficulté si les objets étaient disposés sur une ligne droite, le premier objet dénombré étant en général l'objet le plus à gauche.



- d'une mobilisation d'un schème inadapté à la situation.

Si on pose le problème suivant à un élève : *Marie a 8 ans de moins que Pierre. Marie a 15 ans. Quel est l'âge de Pierre ?*

Une réponse fréquente est : 15 – 8 = 7 ans. Ce schème est inadapté à cette situation et a été probablement appelé par l'élève à cause de l'expression « de moins que » qui fait résonance avec la soustraction.

- d'une élaboration d'un théorème-en-acte faux.

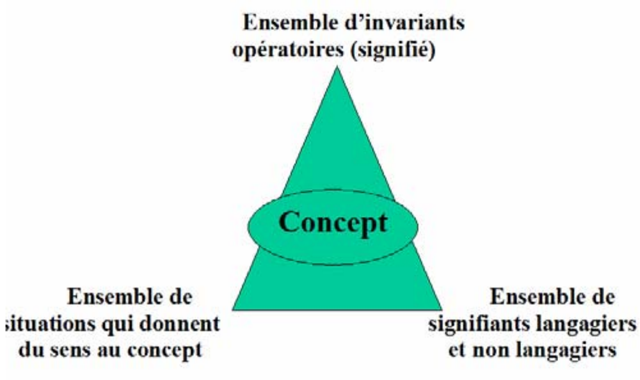
Il est fréquent de constater que les élèves écrivent : $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{3}{8}$. Le théorème-en-acte que l'on peut énoncer ainsi $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. Il prolonge un théorème valable pour la somme des entiers à la somme de fractions.

De même les élèves peuvent écrire 23 – 17 = 14 en effectuant la soustraction par colonne du plus grand entier et du plus petit. Étant donné que l'élève ne peut pas effectuer 3 – 7, il effectue 7 – 4 et ensuite il effectue 2 – 1. Là encore, l'élève prolonge la soustraction sur des entiers à un chiffre aux entiers en général.

3B. Les Concepts

Comme nous l'avons déjà dit, un **concept** ne se résume pas à sa définition. Un **concept** prend du sens à travers les situations et les problèmes dans lesquels il est un outil pour répondre aux situations ou pour résoudre les problèmes.

Ainsi un concept est la donnée de trois ensembles :

Signifié : l'ensemble des invariants opératoires, propriétés spécifiques du concept ***Référence*** : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept ; ***Signifiant*** : l'ensemble de termes, de dénomination ou de symboles représentant le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement	

Prenons un exemple pour illustrer cette définition d'un concept.

Le concept d'addition

• Les situations faisant appel à un tout et à une de ses parties sont en général liées à l'addition « *Dans ma poche droite j'ai 12 euros et dans ma poche gauche j'ai 7 euros* », de même pour les situations de report de longueur *« Si A, B et C sont trois points alignés dans cet ordre alors AB + BC = AC* ». Nous pouvons noter aussi les situations de gains « *J'ai 30 euros dans ma tirelire et pour mon anniversaire j'ai reçu 15 euros* ».

• les propriétés habituelles de l'addition :

Propriétés	*Traduction des propriétés en langage symbolique*
commutativité de l'addition	$a + b = b + a$
associativité de l'addition	$(a + b) + c = a + (b + c)$
0 est élément neutre pour l'addition	$a + 0 = 0 + a = a$
tout élément *a* possède un symétrique pour l'addition	$a + (- a) = (- a) + a = 0$
compatibilité de l'addition avec l'égalité	si $a = b$, alors $a + c = b + c$

• les symboles (+, –, =, (,),), les mots (somme, ajouter, terme, retenue, …) sont nécessaires pour représenter l'addition ou pour décrire des traitements liés à l'addition.

Il est important de noter que ces ensembles ne sont pas déterminés une bonne fois pour toute. Au fur et à mesure de l'apprentissage, ils s'enrichissent traduisant l'élévation du niveau de conceptualisation et le développement cognitif du sujet apprenant.

3C. Les Champs conceptuels

Un champ conceptuel peut être considéré comme un ensemble de situations faisant appel à un concept ou un groupe de concepts. Cet ensemble est associé à une analyse des tâches proposées et des procédures mises en œuvre par les apprenants.

Du point de vue pratique, un champ conceptuel est constitué de l'ensemble des situations dont la maîtrise progressive fait appel à une grande variété de procédures, de concepts en étroite connexion.

Du point de vue théorique, un champ conceptuel est constitué par l'ensemble de concepts et des théorèmes qui contribuent à la maîtrise progressive de ces situations.

Nous allons exposer plus précisément ce qu'est un champ conceptuel.

3C1 Vers une définition plus précise…

D'une part, il faut comprendre qu'un concept n'intervient jamais seul dans une situation et qu'il est nécessairement lié à un réseau d'autres concepts. D'autre part, pour un concept donné, la classe des situations dans laquelle il est opératoire, est elle-même très vaste. Enfin une même situation peut ressortir de deux classes, chacune étant rattachée à un concept.

Ainsi Gérard Vergnaud a été amené à définir la notion de champ conceptuel. Comme nous l'avons dit plus haut, un champ conceptuel **[II.3-2]** est défini par : *un ensemble de situations dont le traitement implique des schèmes, concepts et théorèmes et un ensemble de représentations symboliques et langagières.*

Cette notion de champ conceptuel permet de replacer un concept dans un réseau de concepts et de préciser les classes de problèmes où ces concepts sont des outils pertinents de résolution.

Un certain nombre de champs conceptuels a été bien étudié à l'heure d'aujourd'hui :

- *les structures additives,*
- *les structures multiplicatives,*
- *la proportionnalité,*
- *la résolution d'équation.*

3C2 Un exemple de champ conceptuel : les structures additives

Gérard Vergnaud dans l'article **[II.3-1]** déjà cité distingue six relations de base pour le champ conceptuel des structures additives. Voici comment il présente le champ conceptuel des structures additives : « Le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions ou soustractions, et à l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques. Sont aussi constitutifs des structures additives, les concepts de cardinal et de mesure, de transformation temporelle par augmentation ou diminution (perdre ou dépenser 5 francs), de relation de comparaison quantifiée (avoir 3 bonbons ou 3 ans de plus que), de composition binaire de mesures (combien en tout ?), de composition de transformations et de relations, d'opération unaire, d'inversion, de nombre naturel et de nombre relatif, d'abscisse, de déplacement orienté et quantifié. Ces concepts ne vont pas seuls : ils n'auraient guère de portée si des théorèmes ne leur donnaient leur fonction, dans le traitement des situations :

$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ pourvu que $A \cap B = \varnothing$

$F = T(I) \Rightarrow I = T^{-1}(F)$ où I est l'état initial, T la transformation et F l'état final.

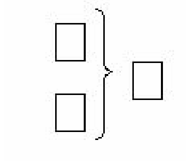
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (Relation de Chasles) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ quelque soit la position relative de A, B et C.

etc.… »

Nous rappelons le codage utilisé : le carré □ représente un état alors que le cercle ○ représente une transformation.

R1 = Relation partie – partie-tout

Il préconise la représentation schématique ci-jointe de cette relation :



Cette relation est présente dans les exemples suivants :

• *Il y 15 voitures et 18 camions sur un parking, combien y-a-t-il de véhicules sur le parking ?*

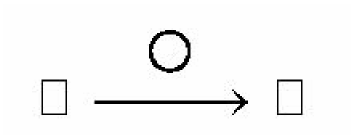
Le tout est ici l'ensemble des véhicules sur le parking et les deux parties sont représentées par les voitures et les camions.

• *Pour un repas d'anniversaire, il y a 28 personnes autour d'une table dont 17 hommes. Combien y-a-t-il de femmes ?*

Le tout est l'ensemble des personnes autour de la table et les deux parties sont l'ensemble des hommes et celui des femmes. On peut remarquer que, dans cette relation, l'inconnue n'est pas forcément le cardinal de la partie-tout et donc que l'opération à effectuer peut être une soustraction comme dans le deuxième exemple.

R2 = Relation état initial – transformation – état final

Il préconise la représentation schématique ci-jointe de cette relation :



Donnons deux exemples de cette relation :

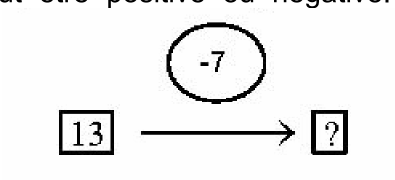
• *Pierre a 37 euros dans sa tire-lire, à son anniversaire il reçoit 12 euros. Combien a-t-il d'argent maintenant ?*

L'état initial est représenté par l'argent que Pierre a avant son anniversaire. Il reçoit 12 euros, cela représente alors la transformation. Et l'argent de Pierre, après son anniversaire, représente l'état final.

• *Luc a 13 billes, il joue une partie dans laquelle il perd 7 billes. Combien de billes a-t-il après cette partie ?*

L'état initial est représenté par le nombre de billes que Luc a avant de jouer sa partie. Il perd 7 billes, cela représente alors la transformation. Et le nombre de billes de Luc, après sa partie, représente l'état final.

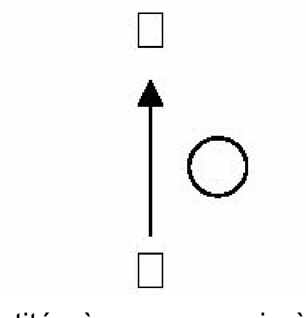
En plus des remarques formulées dans le cas précédent, on peut ajouter que la transformation peut être positive ou négative. En effet le deuxième exemple peut être schématisé ainsi :



R3 = Relation de comparaison :

avoir *tant* de plus ou de moins que

Il préconise la représentation schématique ci-jointe de cette relation :



Dans cette relation, nous devons être en présence de deux quantités à mesurer puis à comparer. C'est la différence avec la relation précédente où il n'y avait qu'une seule quantité à mesurer mais qui subissait une transformation.

Cette relation est présente dans les exemples suivants :

• *Alain mesure 1,45 m et Marie mesure 1,62. De combien de cm Marie dépasse-telle Alain ?*

Les deux quantités à mesurer sont la taille des deux personnes et on cherche la relation entre ces deux quantités.

• *Béatrice a 18 perles et remarque qu'Aline a 25 perles de plus qu'elle. Combien de perles a Aline ?*

Les deux quantités mesurées sont l'ensemble des perles des deux filles. On connaît la relation de comparaison avec l'information « *Aline a 25 perles de plus que Béatrice* ».

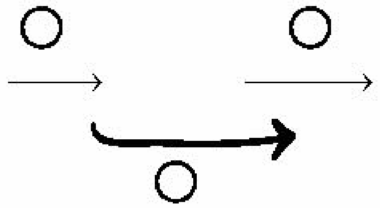
• *Denis a 32 euros dans sa tire-lire et Benoît 9 euros de moins que Denis. Combien d'argent a Benoît ?*

Les deux quantités mesurées sont représentées par l'argent possédé par les deux garçons. La relation de comparaison est donnée par « *Benoît a 9 euros de moins que Denis* ».

Comme dans la relation **R2**, on peut remarquer que **R3,** la relation de comparaison, peut être négative (comme dans le dernier exemple) ou positive (comme dans les deux premiers exemples).

R4 = Composition de deux transformations

Il préconise la représentation schématique ci-jointe de cette relation :



Dans cette relation **R4**, on ne connaît pas la mesure exacte des quantités mais uniquement les deux transformations subies par les quantités. On est donc en présence de trois transformations qui peuvent être représentées par des nombres positifs ou négatifs.

Examinons alors quelques exemples :

• *Thomas joue successivement à deux parties de billes. A la première il gagne 8 billes et à la deuxième il perd 5 billes. A-t-il gagné ou perdu des billes et de combien ?*

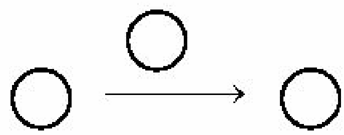
Il est clair qu'ici nous ne connaissons jamais le nombre de billes qu'a Thomas. En revanche, ce nombre de billes subit successivement deux transformations : *la première est un gain de 8 billes* et *la deuxième est une perte de 5 billes*. Globalement tout revient à opérer la transformation composée au nombre de billes que Thomas possédait initialement. Cette transformation composée *est un gain de 3 billes*.

• *Julia joue au jeu de l'oie. Au troisième coup de la partie, elle recule de 5 cases. Après le quatrième coup, elle s'aperçoit qu'elle a avancé de 3 cases par rapport à sa position du troisième coup. Que s'est-il passé au quatrième coup ?.*

Ici on connaît la première transformation (un recul de 5 cases) et la transformation composée (une avance de 3 cases) et on cherche la deuxième transformation.

R5 = Transformation d'une relation

Il préconise la représentation schématique ci-jointe de cette relation :



Ici on est en présence d'une relation entre deux quantités et cette relation subit une transformation. En fait les transformations initiale et finale ont un statut d'états

Examinons quelques exemples :

• *Cyril a 5 billes de plus que Luc. Ils jouent une partie et lors de cette partie Luc gagne 8 billes à Cyril. Comparer le nombre de billes de Cyril et de Luc.*

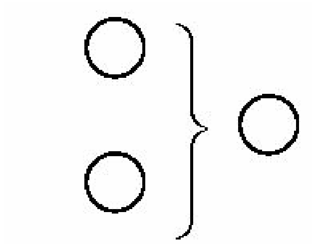
Nous sommes en présence d'une relation entre le nombre de billes de Cyril et celui de Luc. La première relation est donnée par « *Cyril a 5 billes de plus que Luc* », cette relation se transforme puisque « *Luc gagne 8 billes à Cyril* » et on demande l'état de la relation entre le nombre de billes des deux garçons après cette partie.

• *Blandine et Aude font une course de natation de 100 m. A mi-parcours Blandine a 32 secondes d'avance sur Aude mais dans la deuxième moitié du parcours Aude reprend 19 secondes à Blandine. Qui a gagné entre les deux filles ? avec quel est l'écart ?*

La relation étudiée est l'écart de temps entre les deux filles. Dans la première partie du parcours, cette relation est positive (si on examine la relation Blandine – Aude et non Aude – Blandine) et dans la deuxième elle est négative. Nous sommes bien en présence d'une relation puisque le temps effectué par les deux filles nous est inconnu, seul l'écart est connu.

R6 = Composition de deux relations

Il préconise la représentation schématique ci-jointe de cette relation :



A la différence du cas précédent où nous n'avions qu'une seule relation qui se transformait, nous sommes ici en présence de deux relations qui se composent pour en donner une troisième. Nous devons donc avoir connaissance de trois quantités à mesurer : deux pour la première relation et une troisième liée avec une des deux premières par la deuxième relation.

Voici quelques exemples de cette dernière catégorie du champ conceptuel des structures additives.

• *Claire mesure 7 cm de plus que Rémi qui mesure 3 cm de moins que Paul. Comparer les tailles de Claire et de Paul.*

Les trois quantités à mesurer sont les tailles des trois personnes. Nous avons deux relations de comparaison entre les tailles de Claire et de Rémi d'une part et entre les tailles de Rémi et de Paul d'autre part. Nous en déduisons, par composition, la relation de taille entre Claire et Paul.

• *Dans cette ville, il y a trois parkings. Le parking P_1 contient 102 places de plus que le parking P_2 qui contient 26 places de plus que le parking P_3. Comparer le nombres de places des parkings P_1 et P_3.*

Les trois quantités à mesurer sont les tailles des trois parkings. Nous avons deux relations de comparaison entre les tailles des parkings P_1 et P_2 d'une part et entre les tailles des parkings P_2 et P_3 d'autre part. Nous en déduisons, par composition, la relation de taille entre les parkings P_1 et P_3.

D'un point de vue pratique, les recherches expérimentales ont mis en évidence que les situations relevant des six catégories de base des structures additives ne conduisent pas à des taux de réussite identiques.

Elles montrent que les deux dernières relations **R5 et R6** sont difficilement appréhendées par des élèves de l'école primaire. Par ailleurs nous rappelons l'importance de l'explicitation et l'utilisation de formes symboliques susceptibles d'étayer la distinction entre les problèmes et de faciliter l'identification des relations et des raisonnements en jeu dans chaque catégorie. Ici les schémas proposés s'avèrent d'une grande efficacité tant pour faciliter la résolution des problèmes par l'apprenant que pour analyser les erreurs des apprenants par l'enseignant.

3D A propos des signifiants et signifiés

Dans la théorie des champs conceptuels, l'étude des schèmes permet d'envisager les phénomènes d'apprentissage indépendamment des systèmes de représentation. Mais on ne peut pas se dispenser d'une étude précise de ces systèmes. En ce qui concerne les signifiants, trois fonctions ont été dégagées :

- une fonction de communication

Il est clair que sans système de représentation, il serait impossible de communiquer. Les signifiants langagiers assument une fonction réferentielle en permettant d'attirer l'attention sur tel ou tel objet, telle ou telle propriété en les désignant. Mais ils permettent d'exprimer les propriétés de ces objets en assumant une fonction prédicative. Cette fonction de représentation, essentielle à la fonction de communication, est tout particulièrement importante pour le symbolisme mathématique.

Par exemple, si l'on veut communiquer sur l'objet mathématique « la droite », outre le mot « droite », nous avons à notre disposition, la représentation graphique, les équations (cartésiennes ou paramétriques), les symboles d, (d), Δ, etc.

- une fonction d'organisation de la démarche et de la mémoire de l'activité mathématique.

Quand on résout un problème de mathématique, nous devons élaborer une démarche pour conduire cette résolution. Cette démarche n'est rendue possible que grâce aux signifiants. De plus, ils permettent de laisser des traces visibles de ce qui a été réalisé. Ceci vaut, par exemple, en algèbre ; c'est grâce aux écritures algébriques qu'un sujet peut retrouver son erreur dans une page de calcul.

- une fonction d'accompagnement de la pensée.

Grâce au langage et au système symbolique de représentations, nous pouvons aider notre pensée en l'étayant. Pensons au progrès apporté par le recours à des notations algébriques symboliques pour résoudre un problème !

Pour illustrer ceci, voilà la traduction d'un texte italien que Bombelli[1] (*vers* 1526-1573), mathématicien italien de la Renaissance avait écrit à propos des équations du troisième degré. Nonobstant le fait qu'il contribua à introduire quelques symboles d'écriture algébrique, il n'a ici recours qu'au langage naturel. Nous y avons inséré une traduction dans des représentations du langage symbolique plus actuel.

[1] Dhombres J, & al (1987) *Mathématiques au fil des âges*. Paris : Gauthier-Villars (p.105)

« J'ai trouvé une autre sorte de racine cubique, très différentes des autres, ce qui arrive dans le cas où le cube est égal à la première puissance et un nombre [*dans le langage actuel, nous dirions* l'équation du 3[ème] degré $x^3 = px + q$], quand le cube du tiers de la première puissance est supérieur au carré de la moitié du nombre absolu [*dans le langage actuel, nous écririons :* $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$ *ou encore* $4p^3 - 27q^2 > 0$], de sorte que la racine carrée a dans l'algorithme un nom et une opération différentes des autres ; dans ce cas, on ne peut l'appeler plus ou moins [*dans le langage actuel, nous écririons :* $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ *est alors un nombre négatif et donc n'a pas de racine carrée, ni positive ni négative.*] ; je l'appellerai cependant plus de moins quand il devra être ajouté, et moins de moins lorsqu'il devra être retranché. [*dans le langage actuel, nous écririons :*

- les racines carrées de –1 sont "plus de moins"1 et "moins de moins"1
- les racines carrées de –25 sont "plus de moins"5 et "moins de moins"5
- les racines carrées de –2 sont "plus de moins"$\sqrt{2}$ et "moins de moins"$\sqrt{2}$]

3E Conceptions des élèves, règles d'action

La notion de conception ou de représentation du savoir par l'élève est un problème crucial en didactique des mathématiques. Comment enseigner à un élève si l'on ne connaît pas avec précision ce qu'il connaît ?

Laissons Aline Robert et Jacqueline Robinet **[II.3-6]** définir cette notion :

« une représentation est le produit d'une activité mentale par laquelle un individu reconstitue le réel auquel il est confronté, et lui attribue une signification spécifique » et elles complètent en précisant que « *les représentations sont organisées en un système symbolique structuré dont la fonction essentielle est l'appréhension et le contrôle du monde par le sujet, en lui permettant de le comprendre et de l'interpréter. Par là, la représentation permet l'adaptation du sujet et elle sera un élément essentiel pour guider ses comportements* »

Ce qu'il faut bien noter dans cet extrait, c'est le rôle des représentations ou conceptions dans la compréhension et l'explication des phénomènes que l'on rencontre. On part du principe que ces représentations sont toujours présentes et même si elles correspondent à une connaissance erronée, elles contribuent toujours à la lecture rationnelle du monde. On retrouve ici la conception épistémologique de Bachelard à propos de la construction des connaissances scientifiques.

Ainsi l'explicitation et la caractérisation des conceptions ou des représentations ont un double objectif :

- mettre en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même concept, les modes de traitement associés,
- différencier le savoir enseigné du savoir de l'élève.

Un grand nombre de travaux ont été effectués pour identifier les conceptions des élèves. Donnons quelques exemples :

- **A propos de la notion de fraction**

Dans une classe de cinquième, ont été posées les questions suivantes :

Q1. Complète la phrase « une fraction, c'est … »

Q2. Si tu devais expliquer à un élève de CM2 ce qu'est 4/5, que lui dirais-tu ?

Q3. Même question avec 13/7

Voici quelques réponses d'élèves à la première question :

Élève 1	→ Une fraction, c'est par exemple 2 gateaux couper en 8 parts: $\frac{2}{8}$
Élève 2	→ Une fraction, c'est par excemple on prend 3 parts de gateau pour 4 parts (excemple $\frac{3}{4}$)
Élève 3	→ Une fraction, c'est : $\frac{4}{5}$ donc le nombre du haud (4) est divisé par le nombre du bat (5)
Élève 4	→ une fraction c'est un trait avec 1 chiffre dessus 1 chiffre dessous
Élève 5	→ Une fraction, c'est "ça peut être un nombre avec une, exemple " 4, 8 " cela se lit quatre huitième ou $\frac{4}{8}$.

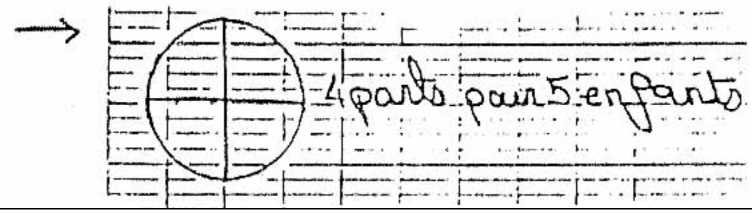
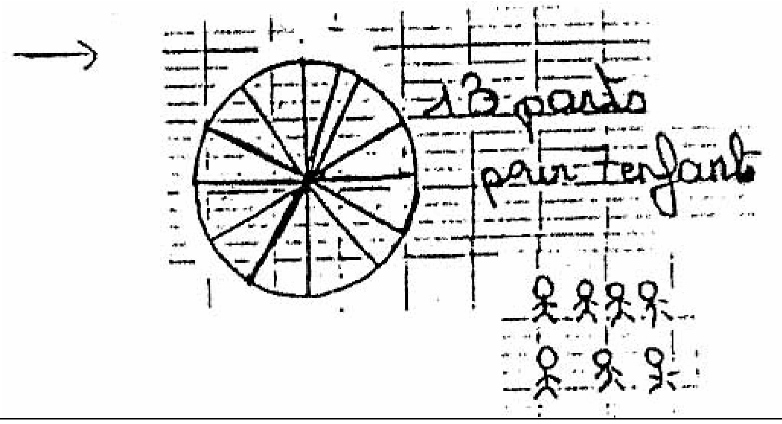
Arrêtons-nous un instant sur ces différentes réponses. Nous nous apercevons immédiatement qu'elles ne sont pas de même nature et que certaines sont vraies et d'autres fausses.

Un travail fréquent en didactique des mathématiques est de classer ces conceptions ou représentations par type. De façon très schématique et simplifiée, nous pouvons repérer trois catégories :

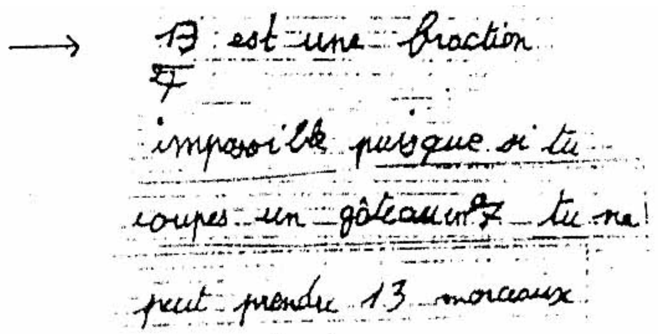
Élèves	1, 2	3	4, 5
Catégories	Idée de partage	Idée de division au sens de l'opération mathématique	Évocation des marques manifestes des représentations symboliques utilisées comme des stéréotypes

Pour la dernière catégorie, il est clair que les élèves ne font aucune référence au sens de l'objet mathématique mais uniquement à son mode de représentation, à ses caractéristiques de surface.

Examinons maintenant quelques réponses aux questions Q2 et Q3 :

Élève 6 Réponse à Q2	
Élève 6 Réponse à Q3	

La réponse à Q2 est intéressante dans le sens où l'élève 6 a bien en tête l'idée de partage. Une interprétation possible est qu'il a du se souvenir des éléments mobilisés par l'enseignant lors de la présentation de fractions. Très probablement, comme il est d'usage, la référence pour introduire la notion de fraction a dû être la situation de partage « concret » de gâteau entre enfants. La stabilité nous est donnée par la réponse qu'il apporte à la question Q3 : 13 parts pour 7 enfants.

Élève 7 Réponse à Q3	
Élève 8 Réponse à Q3	

Ensuite, le cas de l'élève 7 montre qu'il semble refuser de *donner du sens* à 13/7. Cette interprétation semble confirmée par la réponse de l'élève 8. Nous sommes exactement dans ce que décrit Bachelard, l'élève a des connaissances (une fraction, c'est une proportion) et celles-ci bloquent une compréhension à un stade supérieur. Nous pouvons considérer ceci comme un obstacle d'origine didactique : peut-être l'enseignant a-t-il uniquement présenté les fractions sous la forme de « parts de gâteau » ?. Pourtant cette représentation est opérationnelle dans les situations correspondant à des fractionnements de l'unité.

Cet exemple nous montre plusieurs aspects des représentations et conceptions :

- elles sont inhérentes à l'apprentissage du savoir et donc incontournables ;
- elles peuvent être stables, difficiles à modifier ou à faire évoluer ;
- elles peuvent coexister simultanément ce qui fait qu'un sujet convoquera telle ou telle conception selon la situation rencontrée ;
- elles peuvent être un obstacle à l'apprentissage.

- **À propos du nombre décimal**

Nous avons déjà vu à propos de la notion d'obstacles, que certains élèves se représentaient un nombre décimal comme un couple de deux entiers indépendants. Dans leurs travaux de recherche, C. Grisvard et F. Leonard **[II.3-7]** **[II.3-8]** ont montré que, pour comparer deux décimaux positifs, les réponses fausses ont lieu principalement quand les parties entières des deux nombres sont identiques. Ils ont de plus repéré que les réponses fausses d'élèves de quatrième dans le cas où les parties entières sont différentes, sont conformes à l'application de deux règles d'action :

Règle 1	le nombre qui a le plus grand « entier » après la virgule, est le plus grand	
Exemples	*12,113 > 12,4 car 113 > 4*	*Faux*
	5,7 > 5,2 car 7 > 2	Vrai
	8,721 > 8,56	Vrai
Règle 2	le nombre qui a le plus grand nombre de décimales, est le plus petit	
Exemples	*8,721 < 8,56 car 721 a plus de chiffres que 56*	*Faux*
	12,04 < 12,4	*Vrai*
	5,71 < 5,7	*Faux*

Chacune de ces règles a son propre domaine de validité. Toutefois on peut repérer qu'elles sont contradictoires comme l'indique la comparaison de 8,721 avec 8,56. L'étude avait montré que la grande majorité des erreurs provenait de l'utilisation de la règle 1. Comme elle permet aussi la réussite quand la partie décimale contient le même nombre de chiffres, il se peut que des élèves l'aient mise en œuvre implicitement. Ceci amène à des réussites usurpées qui renforcent chez l'apprenant la validité qu'il attribue à cette règle. Il en est de même pour la seconde règle. Toutefois, nous observons que les exercices proposés dans les manuels scolaires portent majoritairement sur des nombres ayant le même nombre de décimales.

Pour les enseignants, l'intérêt de cette étude est de leur fournir des grilles d'interprétation des démarches des élèves quand ils produisent des erreurs. Du même coup, ils obtiennent des informations pour identifier les variables didactiques d'une situation.

Pour aller plus loin…

[II.3-1] Vergnaud G., (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactiques des mathématiques*, n°10.2-3, Grenoble : ed La Pensée Sauvage

[II.3-2] Vergnaud G, (1994), L'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, G. Vergnaud (Coord.) *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?,* Paris Hachette Éducation

[II.3-3] Acioly, N. M. (1994). *"LA JUSTE MESURE: une étude des compétences mathématiques des travailleurs de la canne à sucre du Nordeste du Brésil dans le domaine de la mesure"*. Thèse de Doctorat en Psychologie**.** Université René Descartes - PARIS V.

[II.3-4] A**cioly-Régnier,** N. M. (1997). Analyse des compétences mathématiques de publics adultes peu scolarisés et/ou peu qualifiés in Andrieux, F, Besse, J.-M. et Falaise, B. *Illettrismes : quels chemins vers l'écrit ?* Les actes de l'université d'été du 8 au 12 juillet 1996- Lyon - France : Ed. Magnard

[II.3-5] A**cioly-Régnier, N. M. Gurtner, JL, Thouroude, L** (2005) *Psychologie de l'éducation* Cours de Licence FOAD FORSE Poitiers : CNED

[II.3-6] Robert A, Robinet J, *Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement*, Cahier n°1 DIDIREM, Paris, IREM de Paris VII

[II.3-7] GrIsvard, C, Léonard, F, (1981), Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison des nombres décimaux positifs. *Bulletin de l'A.P.M.E.P. n°327*

[II.3-8] GrIsvard, C, Léonard, F, (1983), Résurgence de règles implicites dans la comparaison des nombres décimaux. *Bulletin de l'A.P.M.E.P. n°340*