Didactique des mathématiques et de la statistique

Cours de Jean-Claude Régnier

5. Théorie anthropologique du didactique

Cette théorie a été développée par Yves Chevallard **[II.5-1]** dans les années 90 et a pour objectif d'être une théorie modélisant l'activité humaine, donc en particulier l'activité mathématique. Elle n'est donc pas spécifique aux mathématiques, même si presque tous les exemples l'illustrant sont d'origine mathématique.

5A La notion d'organisation praxéologique

Yves Chevallard a emprunté à l'anthropologie le concept de praxéologie (praxis : pratique et logos : raison). Pour lui, c'est la donnée de quatre éléments :

- types de tâche
- technique
- technologie
- théorie.

5A1 Types de tâche

Dans son activité, l'homme effectue un grand nombre de tâches ou plutôt de types de tâches: balayer une pièce, monter un escalier, développer une expression algébrique, faire la somme de deux entiers, etc.. La notion de tâche ou de type de tâches est relativement précise : monter, calculer, démontrer ne sont pas des types de tâches car elles sont trop vagues et font appel à des situations très diverses. En effet, calculer peut faire référence à une opération dans les nombres, dans les expressions algébriques, dans les vecteurs, etc.. De même pour monter, on peut monter un cheval, un escalier, une montagne, etc.. On parle alors de genre de tâches.

5A2 Technique

Lorsqu'un sujet a une tâche à effectuer, il a à sa disposition au moins une technique. Il ne faut pas penser qu'un même type de tâche ne fat appel qu'à une seule technique. Nous avons vu précédemment que pour calculer le produit de deux entiers plusieurs techniques étaient envisageables : algorithme habituel, algorithme à la Grecque et celui à la Russe.

Prenons un autre exemple.

Soit le type de tâche : *résoudre une équation du premier degré*

Soit la tâche : *résoudre l'équation* $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 19$.

Technique algébrique
Grâce aux règles de calcul algébrique, l'équation devient :

$\frac{6x + 3x + 2x}{6} = 19$
$\frac{11x}{6} = 19$

x = $19 \times \frac{6}{11}$
x = $\frac{114}{11}$.

Technique dite de la fausse position
Essayons $x_1 = 6$.   *Nous obtenons* $6 + \frac{6}{2} + \frac{6}{3} = 6 + 3 + 2 = 11$, *solution déficiente avec un écart de 8 (19 – 11).*
Essayons $x_2 = 12$.   *Nous obtenons* $12 + \frac{12}{2} + \frac{12}{3} = 12 + 6 + 4 = 22$, *solution excédentaire avec un écart de 3.*
La solution est alors : $x = \frac{6 \times 3 + 12 \times 8}{3 + 8} = \frac{114}{11}$

Il est fréquent qu'une technique ne soit pas valable pour toutes les tâches d'un même type, on parle alors de portée de la technique.

Par exemple, les techniques présentées pour calculer le produit de deux entiers sont inopérantes si le nombre de chiffres des deux nombres est très grand. Difficile d'imaginer d'utiliser ces techniques pour effectuer le produit de deux entiers de 10 chiffres chacun.

Nous rejoignons la théorie de la transposition didactique. En effet l'enseignement de telle ou telle technique dépend de l'institution dans laquelle le sujet se place. L'histoire des programmes nous montre que des techniques disparaissent au profit d'autres.

De plus, il est fréquent qu'une technique soit de nature algorithmique mais ce n'est pas une condition nécessaire ; pensons à des techniques dans le domaine géométrique des tâches comme démontrer qu'un quadrilatère est un carré, démontrer que deux droites sont orthogonales. Cela permet de distinguer les tâches routinières des tâches problématiques. Pour les premières, le sujet dispose de techniques bien connues et éprouvées alors que pour les secondes, le sujet ne dispose pas a priori de techniques. Dans ce cas, elles sont à construire et nécessitent un apprentissage.

5A3 Technologie

C'est le discours mathématique rationnel qui a pour fonction de justifier la technique, de s'assurer que la technique permet de réaliser effectivement la tâche proposée et pour fonction aussi de rendre intelligible, d'éclairer la technique, de savoir pourquoi il en est ainsi. En reprenant les deux exemples précédents (multiplication à la grecque ou à la russe et résolution d'équation par la méthode de fausse position), nous distinguons immédiatement que nous ne possédons pas avec notre cursus scolaire habituel de la technologie justifiant ces techniques.

Examinons par exemple la technologie de la multiplication à la russe.

Elle repose sur les propriétés suivantes :

$2a \times b = a \times 2b$ et $(2a + 1) \times b = a \times (2b) + b$.

En effet $43 \times 3215 = (2 \times 21 + 1) \times 3215 = 21 \times (2 \times 3215) + 1 \times 3215 = 21 \times (6430) + 3215$.

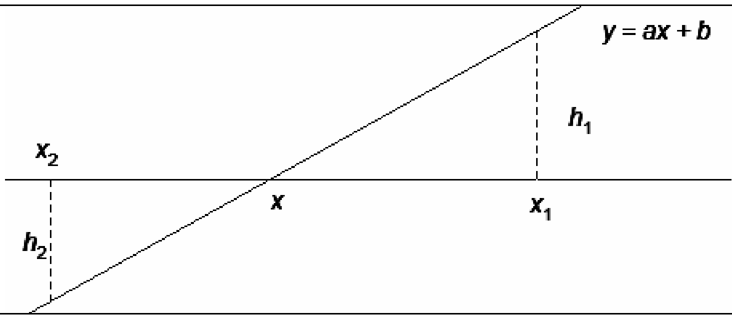
Cette ligne explique pourquoi dans l'algorithme, on place le nombre 3215 en haut de la colonne de droite.

De même $21 \times 6430 = (2 \times 10 + 1) \times 6430 = 10 \times (2 \times 6430) + 6430 = 10 \times 12860 + 6430$.

Puis $10 \times 12860 = (2 \times 5) \times 12860 = 5 \times (2 \times 12860) = 5 \times 25720$.

Cette ligne permet de comprendre qu'on n'écrit aucun nombre dans la colonne de droite à ce niveau.

Reprenons l'exemple de la résolution d'une équation par la méthode de fausse position. Nous savons qu'une expression du premier degré est représentée par une droite. Examinons le problème général, soit à résoudre $ax + b = 0$, toute équation du premier degré peut se ramener à ce cas.



Le théorème de Thalès permet d'écrire $\frac{(x - x_2)}{h_2} = \frac{(x_1 - x)}{h_1}$.

On en déduit $h_1 (x - x_2) = h_2 (x_1 - x)$

$$(h_1 + h_2)\, x = h_2\, x_1 + h_1\, x_2$$

$$x = \frac{h_2\, x_1 + h_1\, x_2}{h_1 + h_2}.$$

En reprenant l'exemple, on a $x_2 = 6$, $h_2 = 8$, $x_1 = 12$ et $h_1 = 3$.

On obtient bien : $x = \frac{8 \times 12 + 3 \times 6}{3 + 8} = \frac{114}{11}$.

Il est important de noter que la technologie nécessite la présence d'un système langagier et symbolique de représentations.

5A4 Théorie

Toute technologie s'insère dans un domaine des mathématiques qui a sa propre unité.

Par exemple, les technologies des techniques de multiplication de deux entiers font partie de l'arithmétique (étude des nombres entiers) alors que celle de l'équation de la fausse position fait partie de la géométrie analytique. Ainsi le quadruplet (type de tâche, technique, technologie, théorie) constitue une praxéologie ponctuelle, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâche.

5B Organisations didactiques et moments de l'étude

La notion d'organisation praxéologique est relative au savoir mais ne permet pas de savoir comment étudier tel concept mathématique. Ceci est l'objet de la notion d'organisation didactique. Yves Chevallard distingue six moments principaux dans l'apprentissage d'un concept :

- la première rencontre
- l'exploration de la tâche ou du type de tâche
- la constitution de l'environnement technico-technologique
- le travail de la technique
- l'institutionnalisation
- l'évaluation

Le premier moment est celui de la première rencontre avec l'objet d'étude. Cette rencontre peut s'opérer de différentes manières mais ce qui est incontournable c'est que le sujet soit confronté à un type de tâches constitutif de l'objet mathématique en question. Par exemple, les élèves rencontrent la symétrie axiale très tôt dans leur scolarité, quand on leur demande de compléter un dessin par symétrie. Ceci est bien un type de tâche et certaines techniques y sont attachées.

Le deuxième moment est celui de l'exploration du type de tâches et l'élaboration d'une technique relative à ce type de tâche. Dans ce moment, l'élève doit constituer une technique pour un type de tâche. Si la situation est bien choisie par l'enseignant, la technique embryonnaire constituée pourra se développer et permettre de réaliser un grand nombre de tâches du même type.

Le troisième moment est la constitution de l'environnement technico-technologique. Ce moment est en général en interaction permanente avec les autres moments. Dès qu'une technique se constitue, il est légitime d'avoir recours à des discours technologiques. Le sujet ne se lance pas dans cette voie sans un minimum de certitudes. Yves Chevallard remarque que traditionnellement l'enseignement commence par ce moment et qu'ensuite on explore les différentes techniques justifiées par la technologie.

Le quatrième moment est celui du travail de la technique. Il a pour objectif de rendre plus sure la technique apprise afin éventuellement de l'automatiser et ainsi de la rendre plus efficace. C'est lors de moment que l'on se pose des questions sur la portée de la technique : permet-elle de réaliser toutes les tâches du même type ? Quel est son domaine de validité ?

Le cinquième moment est celui de l'institutionnalisation qui a pour objet de préciser les éléments à retenir par le sujet, d'exclure les éléments entrevus lors des moments précédents mais qui n'ont pas d'avenir. Il est tout à fait possible que lors de l'élaboration d'une technique, une apparaisse mais qui soit trop contextualisée à la tâche proposée et qui donc n'a aucune chance de survie par la suite. C'est à ce moment-là qu'un tri est effectué pour permettre à l'élève de repérer les éléments technologiques, techniques à savoir.

Le sixième et dernier moment est celui de l'évaluation. C'est le moment choisi pour faire le point sur les apprentissages, repérer ce qui a été appris et ce qui reste encore à travailler.

5C Exemple d'étude d'organisation praxéologique.

Nous allons nous intéresser ici à l' étude des fractions en classe de cinquième. Cette étude s'inspire largement de celle faite par M. Julien et J Tonnelle dans **[II.5-1]** Examinons le programme de la classe :

2.2. Nombres positifs en écriture fractionnaire : sens et calculs		
Sens de l'écriture fractionnaire	- Utiliser l'écriture fractionnaire comme expression d'une proportion.	La classe de cinquième s'inscrit, pour le travail sur les écritures fractionnaires, dans un processus prévu sur toute la durée du collège. Au cycle 3, l'écriture fractionnaire a été introduite en relation avec la signification « partage » ($\frac{3}{5}$, c'est 3 fois $\frac{1}{5}$). En sixième, la signification a été étendue : $\frac{3}{5}$ désigne le cinquième de 3 (le nombre dont le produit par 5 est égal à 3). En relation avec le travail sur la notion de fréquence, une nouvelle signification est introduite : $\frac{3}{5}$ exprime la relation entre une partie d'une population et la population totale (la proportion de filles dans le collège est de $\frac{3}{5}$). Un travail de mise en relation de ces différentes significations est conduit avec les élèves.
	- Utiliser sur des exemples numériques des égalités du type $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$.	L'égalité $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ fait l'objet d'une justification à l'aide d'un exemple générique.
Ordre	- Comparer deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes et dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre.	En classe de sixième, la simplification a été abordée et est donc utilisée en classe de cinquième. C'est l'occasion d'envisager la notion de fraction irréductible, mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet. Différents cas peuvent être envisagés : - dénominateurs égaux - numérateurs égaux - dénominateurs et numérateurs différents dans des exemples simples (la généralisation est faite en classe de quatrième). Différentes procédures sont mises en œuvre dans ce dernier cas : - comparaison à un même entier (exemple : comparer $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{4}$ à 1) ; - mise au même dénominateur (dans des cas accessibles par le calcul mental); - calcul des quotients approchés. La systématisation de la réduction au même dénominateur est traitée en classe de quatrième.
Addition et soustraction	- Additionner et soustraire deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes et dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre.	Dans le cadre de la résolution de problèmes, les élèves sont confrontés à des sommes de fractions du type $\frac{3}{4}+\frac{7}{6}$: pour les traiter, ils utilisent des procédures réfléchies (qui participent alors du problème à résoudre), mais l'objectif n'est pas d'aboutir à une règle de calcul. Celle-ci sera établie en classe de quatrième.
Multiplication	- Effectuer le produit de deux nombres écrits sous forme fractionnaire ou décimale, le cas d'entiers étant inclus.	Le travail porte à la fois sur les situations dont le traitement fait intervenir le produit de deux nombres en écritures fractionnaires (en relation avec différentes significations de ces écritures) et sur la justification du procédé de calcul. Exemples de calculs : $\frac{7}{8}\times\frac{5}{3}$; $6\times\frac{22}{7}$; $4{,}8\times\frac{5}{11}$; $\frac{5{,}24}{2{,}1}\times\frac{2}{3}$

A la lecture de ce programme, apparaissent un certain nombre de types de tâches. Toutefois il n'est pas sûr que ceux-ci soient tous explicitement énoncés. Il est donc indispensable, à ce niveau, de résoudre un grand nombres de problèmes liés aux fractions (c'est-à-dire expliciter le champ conceptuel des fractions) pour examiner les différents types de tâches inhérents aux fractions et les technologies relatives à ces types de tâches.

Nous pouvons repérer les types de tâches suivants :

T_1	déterminer si une fraction est un entier, un nombre décimal ou ni l'un ni l'autre
T_2	simplifier une fraction $\frac{a}{b}$ avec *a* et *b* entiers strictement positifs
T_3	déterminer si deux fractions sont égales, ou plus généralement dans un ensemble de fractions, repérer celles qui sont égales entre elles
T_4	ranger des fractions par ordre croissant ou décroissant
T_5	ajouter deux fractions
T_6	multiplier deux fractions
T_7	déterminer la partie entière d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec *a* et *b* entiers positifs
T_8	déterminer une grandeur *g* par rapport à une unité *u* dont on connaît la mesure par rapport à une grandeur g_0 connue par rapport à *u*.

Il resterait maintenant à expliciter pour chacun des types de tâches au moins une technique permettant de réaliser la tâche et la technologie relative à ces techniques. Nous allons le faire mais uniquement pour le type de tâche T_1.

Pour T_1 deux techniques peuvent être élaborées :

$\tau_{1,1}$: effectuer la division euclidienne de a par *b* et constater que le reste est nul ou que le reste de la division de *a* par *b* est nul au bout d'un certain nombre d'étapes :

Exemple : soit la fraction $\frac{144}{8}$

On pose l'opération 144 : 8

$$\begin{array}{r|l} 144 & 8 \\ \cline{2-2} 64 & 18 \\ 0 & \end{array}$$

Le reste est nul, donc $\frac{144}{8}$ est un nombre entier et vaut 18.

De même $\frac{357}{1680}$.

On pose la division 357 : 1680

$$\begin{array}{r|l} 3570 & 1680 \\ \cline{2-2} 2100 & 0{,}2125 \\ 4200 & \\ 8400 & \\ 0 & \end{array}$$

Le reste est bien nul au bout de quelques étapes. La fraction est bien un nombre décimal et elle égale à 0,2125.

$\tau_{1,2}$: simplifier la fraction à l'aide de la technique de la tâche T_2.

Pour la technique de la tâche T_2, plusieurs techniques sont possibles :

$\tau_{2,1}$: décomposer les numérateurs et dénominateurs en facteurs premiers

ou

τ_{22} : diviser numérateur et dénominateur successivement par les mêmes premiers nombres entiers

Ainsi $\frac{144}{8} = \frac{2^4 \times 3^2}{2^3} = 2 \times 3^2 = 18$ ou $\frac{144}{8} = \frac{2 \times 72}{2 \times 4} = \frac{72}{4} = \frac{2 \times 36}{2 \times 2} = \frac{36}{2} = \frac{2 \times 18}{2} = 18$.

De même $\frac{357}{1680} = \frac{3 \times 7 \times 17}{2^4 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{17}{2^4 \times 5}$

$\frac{357}{1680} = \frac{3 \times 119}{3 \times 560}$. On n'a pas divisé par 2 car 357 n'est pas divisible par 2.

$\frac{357}{1680} = \frac{119}{560} = \frac{7 \times 17}{7 \times 80} = \frac{17}{80}$

Or $80 = 2^4 \times 5$, donc la fraction est bien décimale.

Il est clair que la technologie relative à ces deux techniques est différente.

- Pour la première technique (celle de la division), le savoir qui est en jeu est le suivant :

Un nombre $\frac{a}{b}$ est entier si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Un nombre $\frac{a}{b}$ est décimal si et seulement si le reste de la division de a par b est nul au bout d'un nombre (fini) d'étapes.

- Pour la deuxième technique, le savoir est très différent. La technologie repose sur les propriétés suivantes :

Pour tous entiers a,b et k : $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ avec k et b non nuls.

Une fraction est décimale si et seulement si sa fraction simplifiée au maximum (fraction irréductible) a un dénominateur n'ayant comme facteurs que des « 2 » ou des « 5 ».

Nous laissons au lecteur, le soin de poursuivre ce travail en autonomie. Il est clair que ce travail éclaire l'enseignant sur les situations à faire aborder aux élèves, sur les savoirs à institutionnaliser.

Pour aller plus loin…

[II.5-1] Chevallard, Y, (1998), *Analyse de pratiques enseignantes et didactique des mathématiques,* Actes de l'UE de la Rochelle, Clermont-Frerrand, I.R.E.M.

[II.5-2] Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2).

[II.5-3] Chevallard, Y. (1992).. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1)